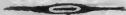
LEZIONI
ELEMENTARI
DI
MATEMATICHE
DEL SIG. AB.
MARIE

TRADOTTE E ILLUSTRATE
DA STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO
DELLE SCUOLE PIE
Pubblici Professori di Matematica

Ed accresciute di nuovi metodi molto importanti in questa

QUINTA EDIZIONE

FIRENZE MDCCCIII.

A spese di Guglielmo Piatti Mercante di Libri
Presso Pietro Allegrini alla Croce Rossa
Con Licenza de' Superiori

AVVISO

DELL' EDITORE.

Non vi è stato sicuramente alcun Libro di *Màtematiche*, che abbia avuto un esito così rapido come le *Lezioni Elementari* dell' Ab. *Marie* tradotte ed illustrate dai celebri Professori *Canovai* e *Del-Ricco*. Quattro successive e ben copiose Edizioni son già esaurite; e le incessanti ricerche che se ne fanno tuttora, autenticando il sommo pregio del Libro, assicurano il pubblico gradimento del mio pensiero di riprodurlo.

Ma poichè i dotti Illustratori che con i loro travagli hanno contribuito al miglioramento d' ogni Edizione, a segno di potersi mettere in dubbio se abbiano pareggiato o forse ancor superato il merito dell' Autore, non potevan forse lasciare che nuovamente uscisse senza qualche ulterior perfezione questo sì celebre Corso di Matematiche, non volli omettere d' implorar la loro assistenza, e con mia piena soddisfazione ottenni cortesemente e abbondantemente di che distinguere questa quinta Edizione.

Molte erano già le ragguardevoli Aggiunte da Essi fatte: e i loro Trattati originali delle *Variazioni*, dell'*Equazioni a Differenze finite e a Differenze parziali* parea che nulla lasciassero da desiderare. Pure il loro genio e l'appassionato trasporto per il vantaggio della Gioventù, gli ha determinati a dare alle Lezioni suddette un ordine più metodico, che in minor volume contenga senza confusione e senza oscurità maggior numero di utili cognizioni, a rifondere totalmente i Trattati delle *Potenze e Radici*, dell'*Infinito*, delle *Ragioni e Proporzioni*, dell'*Equazioni dei Gradi superiori*, le due *Trigonometrie piana e sferica*, e il Trattato delle *Sezioni Coniche;* togliendo intanto alcune inutili ripetizioni, come l'articolo separato della quadratura di queste, incluso nel Calcolo infinitesimale.

Ho conservato in questa Edizione il sistema dei due caratteri, il cui uso la stessa esperienza ha bastantemente raccomandato, contenendo il *piccol carattere* ciò che è riservato a un secondo studio di chi, essendosi impossessato già dei precetti esposti in *carattere maggiore*, brama avanzarsi più oltre: sistema pregiabilissimo che risparmia non poca mole del Libro, conserva l'ordine con maggior rigore, e facilita anche il corso notabilmente; laddove il trascurarlo o il non

avvertirlo farebbe incontrare ai Principianti la confusione e le difficoltà dove tutto è diligentemente spianato, ed esattamente metodico.

Si comprenderà senza pena, che i Numeri da cui son distinti i paragrafi di quest' Edizione non potevano corrispondere a quelli della passata, di cui pur s' incontrano frequenti le citazioni nella seconda edizione e della Fisica-Matematica, e dei preliminarj alle Tavole Logaritmiche, pubblicate dai citati due Professori. Per provvedere al bisogno di chi vorrà prevalersi di questa mia Edizione, è stata fatta una nota dei confronti dei numeri tra essa e la precedente, che io farò stampare immediatamente per darla *gratis* a chiunque avrà l' accennate Tavole e Fisica.

INDICE

Pag.	ver.	ERRORI	CORREZIONI
22	ult.	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{6}$
56	8	$\frac{m-4}{2}$	$\frac{m-6}{2}$
57	10	$\frac{q}{p^n}$	$\frac{q}{np^n}$
63	11	(337)	(318)
78	18	$\frac{r^3}{3}$	$\frac{r^3}{2.3}$
	22	(193)	(198)
81	18	dividergli per l' unità	dividerne l' unità
87	21	$\left(\frac{\omega-a}{2}\right)$	$\left(\frac{\omega+a}{2}\right)$
143	21	da x	dà x
	29	(163.3°.)	(368.3°)
148	13	$ex-dx^2$	$ex+dx^2$
200	6	$r^2\pi$	$(r^2\pi)^2$
214	21	$\frac{4}{3}r^2\pi$	$\frac{4}{3}r^3\pi$
215	23	$rz^2\pi$	$r^2z\pi$
231	14	(25)	(630)
242	5	AMN	AMA′
243	13	(677.5)	(680.5)
246	26	$tang\frac{1}{2}g$	$tang\frac{1}{2}g'$
251	3	32° ec.	cos 32° ec.
260	27	del cono, l'equazione	del cono (essendo allora A + B > 180°), l'equazione
266	1	PN	PN^2
268	5	FR×FQ	FR×fQ
	8	TF	Tf
	15	(746)	(755)
272	8	fM—MA	fM—MF
	23	MF	MT
278	21	costituisca FF	sostituisca EF
289	13	(614)	(615)
293	2	$+a^2c^2$	$-a^2c^2$
315	4	$-2a^2z^{\frac{3}{2}}$	$-2a^2z^{\frac{2}{3}}$
321	7	(368)	(868)
322	4	$\mp\frac{px^2}{2a}$	$\pm\frac{px^2}{2a}$
	9	(739)	(759)
326	27	$a:b$	$b:a$

TRIGONOMETRIA RETTILINEA

607. La *Trigonometria* misura le parti dei triangoli e scioglie quando è possibile, questo general problema: *date tre delle sei cose che compongono un triangolo* (422), *trovar l' altre tre*. Ella è *rettilinea* se son rettilinei i triangoli da risolversi, ed è *sferica* se sono sferici. FIG.

608. Condotte nel quadrante CAB le tangenti in A, B, e dai varj raggi CM, CO ec. prolungati fino alle tangenti in X, T, in S ec., calate le varie ordinate MH, OG ec. sul raggio CA, ed MQ, OL ec. sul raggio CB, se a sia un angolo qualunque MCA, o il suo arco MA, chiamo MH il *seno* di a, e scrivo $MH = sen\, a$; AX la *tangente* di a; ed $AX = tang\, a$; CX la *secante* di a, e $CX = sec\, a$; AH il *seno verso* di a, ed $AH = sen\, v.\, a$; quattro rette, che con nome comune diconsi *funzioni* d' un angolo o d' un arco a: e poichè MCB o MB è il complemento di a (399), le quattro funzioni di MB diverranno *co-funzioni* di a, onde $QM = CH$ sarà il *coseno* di a, e $CH = cos\, a$; BT la *cotangente* di a, e $BT = cot\, a$; CT la *cosecante* di a, e $CT = cosec\, a$; BQ il *coseno verso* di a, e $BQ = cos.\, v.\, a$. 99.

609. È chiaro che queste funzioni e co-funzioni variano col raggio $CA = r$: cosicchè il quadrante FQ del raggio $CF = r'$ dà mh per seno di a e non più MH ec.: ma essendo $MH : mh :: MC : mC :: r : r'$, si avrà $mh = \frac{MH.r'}{r}$ o (se il raggio primitivo $r = 1$) $mh = MH.r'$; per aver dunque la funzione mh basterà moltiplicar la primitiva MH per il nuovo raggio r'. Noi

E e

99 faremo sempre $r=1$; e se non lo sia, le funzioni, perchè linee rette o potenze di esse, dovranno moltiplicarsi o partirsi per quella potenza di r che le renda omogenee (107).

610. Ciò supposto, si ha $MH(=QC=cos\,BM)=$

1°. $sen\,a=cos(90°-a)$ ... $CH\,(cos\,a) : HM\,(sen\,a) :: CA\,(1) : AX=$

2°. $tang\,a=\frac{sen\,a}{cos\,a}$ ... $CH\,(cos\,a) : CA\,(1) :: CM\,(1) : CX=$

3°. $sec\,a=\frac{1}{cos\,a}$ ... $AH=AC-CH=$

4°. $sen\,v.\,a=1-cos\,a$ ... $CH\,(=QM=sen\,BM)=$

5°. $cos\,a=sen(90°-a)$ ... $MH\,(sen\,a) : CH\,(cos\,a) :: CB\,(1) : BT=$

6°. $cot\,a=\frac{cos\,a}{sen\,a}=\frac{1}{tang\,a}$ ... $QC\,(sen\,a) : BC\,(1) :: MC\,(1) : TC=$

7°. $cosec\,a=\frac{1}{sen\,a}$ ... $BQ=BC-CQ=$

8°. $cos\,v.\,a=1-sen\,a$ ... $CM^2=MH^2+HC^2=$

9°. $1=sen^2a+cos^2a$ ... $CX^2=CA^2+AX^2=$

10°. $sec^2a=1+tang^2a$ ... $CT^2=CB^2+BT^2=$

11°. $cosec^2a=1+cot^2a$; formule fondamentali da cui ne avremo poi molt' altre.

611. Per ora osservo che da A a B i seni crescono e i coseni scemano, ambedue positivi; in A si ha $sen\,a=0$ e $cos\,a=r$; in B, a 90° da A, $sen\,a=r$ e $cos\,a=0$. Da B a D i seni scemano e son positivi, ma i coseni crescono e son negativi; in D, a 180° da A $sen\,a=0$ e $cos\,a=-r$. Da D ad E i seni crescono e i coseni scemano, ambedue negativi; in E, a 270° da A, $sen\,a=-r$ e $cos\,a=-0$. Da E ad A i seni scemano e son negativi, e i coseni crescono e son positivi: in A, a 360°, tutto ricomincia come prima quando $a>360°$; e fatto, per esempio, $a=90°$, e supposto n un numero qualunque ed m il resto di

$\frac{n}{4}$, sarà *sen na* = *sen ma*, *cos na* = *cos ma*: così *sen* 7.90° = *sen* 3.90°, *cos* 14.90° = *cos* 2.90° ec.

612. Dunque anche l'altre funzioni, che come si è visto (610), dipendon tutte dal seno e dal coseno, varieranno in valore ed in segno per l'intera circonferenza: così la tangente alternativamente positiva e negativa nei quattro quadranti, sarà $tang\,a = \frac{sen\,a}{cos\,a} = \frac{0}{r} = 0$ in A, $= \frac{r}{0} = \infty$ in B, $= \frac{0}{-r} = -0$ in D, $= \frac{-r}{-0} = \infty$ in E, ricominciando anch'essa col primo ordine se $a > 360°$. Ecco in compendio i cangiamenti delle quattro principali funzioni.

	a 0°	da 0° a 90°	a 90°	da 90° a 180°	a 180°	da 180° a 270°	a 270°	da 270° a 360°
sen	0	+	$+r$	+	0	−	$-r$	−
cos	$+r$	+	0	−	$-r$	−	−0	+
tang	0	+	$+\infty$	−	−0	+	$+\infty$	−
cot	∞	+	0	−	$-\infty$	+	−0	−

613. Osservo ancora che il seno MH d'un arco MA è la metà della corda MZ d'un arco doppio MAZ (406): onde 1°. come MZ è corda di MAZ e di MBDEZ, così MH è seno di MA e del suo supplemento MBD: 2°. come MAZ = 60° dà MZ = $r = 1$ (456), così MA = 30° dà MH = *sen* 30° = $\frac{1}{2}$; allora CH = *cos* 30° = (form. 9ª) $\sqrt{(1 - sen^2 30°)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$: 3°. come OAZ′ = 90° dà OZ′ = $\sqrt{2}$ (459), così OA = 45° dà OG = *sen* 45° = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = GC = *cos* 45°; allora anche CA = AS = *tang* 45° = 1 = SB = *cot* 45°: perciò gli archi equidifferenti da 45° in − ed in +, avranno reciprocamente i seni eguali ai coseni, ed MH = *sen* 30° = *sen* (45° − 15°) = $\frac{1}{2}$ =

99.

99. CF $= \cos 60° = \cos(45° + 15°)$, e CH $= \frac{1}{2}\sqrt{3} =$ PF.

614. Dati ora i seni o metà di corde $\frac{m}{2} = sen\, a$, $\frac{n}{2} = sen\, b$ di due archi a, b, se si voglia il seno $\frac{d}{2} = sen\,(a \pm b)$ della lor somma o differenza, si avrà (form. 9ª.) $\cos a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}m^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, e $\cos b = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}n^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)}$; dunque (485.486) $\frac{d}{2} = \frac{m}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)} \pm \frac{n}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, cioè, fatto $r = 1$,

12ª. $sen\,(a \pm b) = sen\, a \cos b \pm sen\, b \cos a = \pm sen\,(b \pm a)$.

615. Dunque $\cos(a \pm b) =$ (form. 5ª.) $sen\,(90° - (a \pm b)) = sen((90° - a) \mp b) = sen(90° - a)\cos b \mp sen\, b \cos(90° - a)$; ma (form. 1ª. 5ª.) $sen\,(90° - a) = \cos a$ e $\cos(90° - a) = sen\, a$; dunque

13ª. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp sen\, a\, sen\, b = \cos(b \pm a)$: e se la form. 12ª. si divida per la 13ª, e il numeratore e denominator del secondo membro per $\cos a \times \cos b$, avremo

14ª. $tang\,(a \pm b) = \frac{tang\, a \pm tang\, b}{1 \mp tang\, a\, tang\, b}$; lasciando fin d'ora di notare (toltone qualche caso) la cotangente che si ha subito dalla tangente (form. 6ª.). Le formule dell'altre funzioni, e le varie espressioni di quelle medesime che abbiam trovate, si avrebbero nel modo stesso: ma basta a noi di dar le fondamentali da cui nascono tutte l'altre. Fermiamoci a considerar la 12ª. e la 13ª. che tanto importano.

616. Giacchè (614.615) $sen\,(a - b) = - sen\,(b - a)$ e $\cos(a - b) = \cos(b - a)$, combinando le formule 2ª, 3ª, 6ª, 7ª, si troverà $tang\,(a - b) = - tang\,(b - a)$, $\cot(a - b) = - \cot(b - a)$ ec.

617. Se gli angoli a, b sieno piccolissimi ed ab-

bian per seni s, σ, sarà prossimamente (form. 9ª.) $sen\,(a \pm b) = s\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sigma^2)^2} \pm \sigma\sqrt{(1 - \frac{1}{2}s^2)^2} = s(1 - \frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sigma(1 - \frac{1}{2}s^2) = (s \pm \sigma)(1 \mp \frac{1}{2}s\sigma) = s \pm \sigma = sen\,a \pm sen\,b$, per esser $s\sigma$ assai piccolo.

618. Facendo $a = 90°, = 180°, = 270°, = 360°$, le form. 12ª, 13ª, 14ª daranno

$$sen \begin{cases} 90° \pm b = + cos\,b \\ 180° \pm b = \mp sen\,b \\ 270° \pm b = - cos\,b \\ 360° \pm b = \pm sen\,b \end{cases} \qquad cos \begin{cases} 90° \pm b = \mp sen\,b \\ 180° \pm b = - cos\,b \\ 270° \pm b = \pm sen\,b \\ 360° \pm b = + cos\,b \end{cases}$$

$$tang \begin{cases} 90° \pm b = \mp cot\,b \\ 180° \pm b = \pm tang\,b \\ 270° \pm b = \mp cot\,b \\ 360° \pm b = \pm tang\,b \end{cases} \qquad cot \begin{cases} 90° \pm b = \mp tang\,b \\ 180° \pm b = \pm cot\,b \\ 270° \pm b = \mp tang\,b \\ 360° \pm b = \pm cot\,b \end{cases}$$

ove si noti 1°. che le funzioni negative $- sen\,b$, $- cos\,b$ ec. appartengono ad archi che posson sempre determinarsi; infatti

$- sen\,b = sen\,(180° + b) = sen\,(360° - b)$
$- cos\,b = cos\,(180° \pm b)$
$- tang\,b = tang\,(180° - b) = tang\,(360° - b)$
$- cot\,b = cot\,(180° - b)$: 2°. che essendo $cos\,(180° - b) = cos\,b$ (astraendo dal segno), se un arco $b + m$ sia medio tra b e il suo supplemento, sarà $b + m < 180° - b$, $cos\,(b + m) < cos\,(180° - b)$ cioè $cos\,(b + m) < cos\,b$; e quando pur si moltiplichi $cos\,(b + m)$ per n seni o coseni, sarà sempre (64) $n\,cos\,(b + m) < cos\,b$: 3°. che una stessa funzione appartiene a molti archi, come $sen\,b = \pm sen\,(180° \mp b) = \pm sen\,(360° \pm b)$, o in generale $sen\,b = \pm sen((2n + 1)\,180° \mp b) = \pm sen\,(n . 360° \pm b)$, espressione che si riduce alla prima; poichè $\pm sen\,((2n + 1)\,180° \mp b) = \pm sen\,(n . 360° + (180° \mp b)) = \pm sen\,(180° \mp b)$; e fatto $n = m + 1$, $\pm sen\,((m + 1)\,360° \pm b) = sen\,(m . 360° +$.

$(360° \pm b)) = \pm sen(360° \pm b) = \pm sen(180° + (180° \pm b)) = \mp sen(180° \pm b)$, onde tutti quei valori si ristringono a $sen\, b$, $sen(180° - b)$, $-sen(180° + b)$.

619. Sommate ora e sottratte le form. 12ª e 13ª, verrà

15ª. $sen\, a \cos b = \frac{1}{2} sen(a+b) + \frac{1}{2} sen(a-b)$

16ª. $sen\, b \cos a = \frac{1}{2} sen(a+b) - \frac{1}{2} sen(a-b)$

17ª. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$

18ª. $sen\, a\, sen\, b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$, formule che trasforman prodotti di seni in seni semplici.

620. Se in queste si faccia $a+b=p$, $a-b=q$, onde $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $b = \frac{1}{2}(p-q)$, si avrà

19ª. $sen\, p \pm sen\, q = 2 sen \frac{1}{2}(p \pm q) \cos \frac{1}{2}(p \mp q)$

20ª. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$

21ª. $\cos q - \cos p = 2 sen \frac{1}{2}(p+q) sen \frac{1}{2}(p-q)$, ed anche

22ª. $tang\, p \pm tang\, q = (2ª. 12ª) \frac{sen(p \pm q)}{\cos p \cos q}$

23ª. $\cot q \pm \cot p = (6ª. 12ª.) \frac{sen(p \pm q)}{sen\, p\, sen\, q}$, formule che cangiano i seni semplici in prodotti di seni.

621. Se nella form. 19ª. sia $p = na$, $q = (n-2)a$, troveremo in generale

24ª. $sen\, na = 2 \cos a\, sen(n-1)a - sen(n-2)a$

25ª. $\cos na = 2 \cos a \cos(n-1)a - \cos(n-2)a$, con che i seni e coseni degli archi multipli si hanno dai loro inferiori: così fatto in particolare $n=2$, verrà

26ª. $sen\, 2a = 2 sen\, a \cos a$, ove se $2a = m$, viene $sen\, m = 2 sen \frac{1}{2} m \cos \frac{1}{2} m$.

27ª. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - sen^2 a$, che divise l'una per l'altra e diviso pure il numeratore e denominator del secondo membro per $\cos^2 a$, danno

28ª. $tang\, 2a = \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a}$.

622. Che se nella form. 19ª. sia $p = 90°$, e nella 20ª. e 21ª. sia $q = 0$, verrà

29ª. $1 \pm sen\, q = 2 sen(45° \pm \frac{1}{2} q) \cos(45° \mp \frac{1}{2} q)$

$30^a.\ 1 + \cos p = 2\cos^2 \frac{1}{2} p$

$31^a.\ 1 - \cos p = 2\,sen^2 \frac{1}{2} p$, e perciò

$32^a.\ sen \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{1 - \cos p}{2}}$

$33^a.\ \cos \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{1 + \cos p}{2}}$ } formule, che, divise l'una per l'altra e moltiplicato al solito il secondo membro per $1 - \cos p$ ovvero per $1 + \cos p$, danno

$34^a.\ tang \frac{1}{2} p = \frac{1 - \cos p}{sen\,p} = \frac{sen\,p}{1 + \cos p} = \sqrt{\frac{1 - \cos p}{1 + \cos p}}$.

623. Dividendo l'une per l'altre le formule del n°. 620, si troverà facilmente

$35^a.\ \frac{sen\,p + sen\,q}{sen\,p - sen\,q} = \frac{tang \frac{1}{2}(p+q)}{tang \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{sen \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)\, sen \frac{1}{2}(p-q)}$

$36^a.\ \frac{sen\,p \pm sen\,q}{\cos p + \cos q} = tang \frac{1}{2}(p \pm q)$

$37^a.\ \frac{sen\,p \pm sen\,q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{1}{2}(p \mp q)$

$38^a.\ \frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{tang \frac{1}{2}(p-q)}$.

$39^a.\ \frac{tang\,p \pm tang\,q}{tang\,p \mp tang\,q} = \frac{sen(p \pm q)}{sen(p \mp q)}$

$40^a.\ \frac{tang\,p \pm tang\,q}{\cot q \pm \cot p} = tang\,p\, tang\,q$

$41^a.\ \frac{tang\,p \pm tang\,q}{\cot q \mp \cot p} = \frac{sen(p \pm q)\, tang\,p\, tang\,q}{sen(p \mp q)}$

624. Dividendo anche l'une per l'altre le form. 29^a, 30^a, 31^a, si ha

$42^a.\ \frac{1 \pm sen\,q}{1 \mp sen\,q} = tang^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2} q)$

$43^a.\ \frac{1 \pm sen\,q}{1 + \cos p} = (613.3^\circ.) \frac{sen^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2} q)}{\cos^2 \frac{1}{2} p}$

$44^a.\ \frac{1 \pm sen\,q}{1 - \cos p} = \frac{sen^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2} q)}{sen^2 \frac{1}{2} p}$

45ª. $\frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\cot^2\frac{1}{2}p$: e se nella form. 39ª. si faccia $p=45°$, verrà (613.3°.)

46ª. $\frac{1\pm tang\,q}{1\mp tang\,q}=tang(45°\pm q)$. E tanto si ha dal sommare e sottrarre le formule 12ª. e 13ª.

625. Se queste ora si moltiplichino, è facile il dedurne

47ª. $sen(a+b)\,sen(a-b)=\cos^2 b-\cos^2 a=sen^2 a-sen^2 b$

48ª. $sen(a\pm b)\cos(a\pm b)=\frac{1}{2}sen\,2(a\pm b)$

49ª. $sen(a\pm b)\cos(a\mp b)=\frac{1}{2}(sen\,2a\pm sen\,2b)$

50ª. $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a-sen^2 b=\cos^2 b-sen^2 a$.

E se si dividano l'una per l'altra col divider pure al solito il secondo membro per $\cos a\cos b$, avremo.

51ª. $\frac{sen(a+b)}{sen(a-b)}=\frac{tang\,a+tang\,b}{tang\,a-tang\,b}$

52ª. $\frac{sen(a\pm b)}{\cos(a\mp b)}=\frac{tang\,a\pm tang\,b}{1\pm tang\,a\,tang\,b}$

53ª. $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{1-tang\,a\,tang\,b}{1+tang\,a\,tang\,b}$. Tutte queste formule posson variarsi all'infinito col sommarle, sottrarle, moltiplicarle e dividerle.

626. I seni, i coseni e l'altre funzioni circolari di cui si è parlato finora, furon calcolate in parti del raggio 1 e di minuto in minuto: le più comode Tavole, a parer nostro, son quelle di Gardiner (Firenze 1796), ove si hanno anche le Tavole dei Logaritmi dei Seni e Tangenti di 10″ in 10″. Se ne troverà qui sotto la costruzione.

Calcolo delle Tavole dei Seni

627. Giacchè le funzioni dei primi 45° son co-funzioni dei 45° seguenti (613.3°.), per aver la Tavola dei Seni fino a 90° basta calcolare i seni fino a 45° e dedurne tutte l'altre funzioni per le formule 9ª, 2ª, 6ª, 3ª, 7ª. La natura del circolo fa poi vederci che i seni tornano in ordine inverso da 90° a 180°, e che quelli dei due ultimi quadranti differiscono nel solo segno da quelli dei due primi. Tutto perciò si ridurrebbe al calcolo d'un semiquadrante se la form. 12ª non diminuisse

diminuisse ancor di 15° la fatica; da essa e da $sen\,30° = \frac{1}{2}$, $cos\,30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (613) si ricava $sen(30° \pm b) \mp \frac{1}{2} sen\,b\sqrt{3} = \frac{1}{2}cos\,b$, onde $sen(30° + b) = sen(30° - b) + sen\,b\sqrt{3}$: si condurrà dunque il calcolo fino a 30°, e posto poi $b = 1°$, 2°, 3° .... 15° si anderà con la formula fino a 45°.

628. Cerchiamo pertanto come possa giungersi a 30°. Poichè (form. 9ª.) $sen^2 a + cos^2 a = 1 = \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2$ (149), e l' arco $a = 0$ dà

54ª. $cos\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, sarà

55ª. $sen\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$: ma supposto $le = 1$ (308), si ha (307) $e^{a\sqrt{-1}} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \text{ec.} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \text{ec.} + (a - \frac{a^3}{2.3} + \text{ec.})\sqrt{-1}$, ed $e^{-a\sqrt{-1}} = 1 - a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \text{ec.} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} + \text{ec.} - (a - \frac{a^3}{2.3} + \text{ec.})\sqrt{-1}$; dunque sostituendo e riducendo, verrà

56ª. $sen\,a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3...6.7} + \frac{a^9}{2.3..8.9} - \text{ec.}$

57ª. $cos\,a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3...5.6} + \frac{a^8}{2.3...7.8} - \text{ec.}$

58ª. $tang\,a = \frac{sen\,a}{cos\,a} = (273)\; a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{3.5} + \frac{17a^7}{3^2.5.7} + \frac{62a^9}{3^2.5.7.9} + \text{ec.}$

59ª. $cot\,a = \frac{cos\,a}{sen\,a} = (273)\; \frac{1}{a} - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{3^2.5} - \frac{2a^5}{3^3.5.7} - \frac{a^7}{3^3.5^2.7} - \text{ec.}$

629. Quì si osservi 1°. che se a sia un arco piccolissimo, lo saranno molto più a^2, a^3 ec., che perciò spariranno in confronto di a, e allora $sen\,a = a = tang\,a$, $cos\,a = 1$, $cot\,a = \infty$: 2°. che se il raggio supposto 1, sia r, queste serie, vo-

lendole ó usar come stanno o calcolare, dovranno supplirsi con le potenze di r, secondo la regola (609), o moltiplicarsi per r nel final risultato (609): 3°. che l'arco a per cui son dati il seno, il coseno ec., supponendosi ridotto in linea retta, non potranno aversi quelle funzioni se non si rettifichi la semicirconferenza o non si sappia la ragione tra il raggio e lei. Ora applicando alla form. 56ª il ritorno delle serie (294), verrebbe

$$60^a.\ a = sen\,a + \frac{sen^3 a}{2.3} + \frac{3 sen^5 a}{2.4.5} + \frac{3.5\, sen^7 a}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\, sen^9 a}{2.4.6.8.9} +$$

ec., e preso un seno già noto, come $sen\,30 = \frac{1}{2}$, si avrebbe l'arco di 30°, che dà quello di $180° = 30°.6$: ma per rettificare un arco è più pronta e più utile la tangente.

630. Poichè da $sen\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $cos\,a = \ldots$ $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$ viene $e^{\pm a\sqrt{-1}} = cos\,a \pm \sqrt{-1}$. $sen\,a = cos\,a(1 \pm \sqrt{-1}.tang\,a)$, o presi i logaritmi (308), $\pm a\sqrt{-1} = l\,cos\,a + l(1 \pm \sqrt{-1}.tang\,a)$, si avrà sottraendo,

$$2a\sqrt{-1} = l\,\frac{1 + \sqrt{-1}.tang\,a}{1 - \sqrt{-1}.tang\,a}, \text{ e } (303)$$

$61^a.\ a = tang\,a - \frac{tang^3 a}{3} + \frac{tang^5 a}{5} -$ ec., serie che rettifica la semicirconferenza π. Infatti posto $a = 45°$, e $tang\,a = tang(b + c) = (613.3°.)\,1 = (615)\,\frac{tang\,b + tang\,c}{1 - tang\,b\,tang\,c}$, sarà $tang\,b = \frac{1 - tang\,c}{1 + tang\,c}$; e se sia $tang\,c = \frac{1}{3}$ e perciò $tang\,b = \frac{1}{2}$, la somma degli archi b, c darà l'arco di 45°, ovvero

$$62^a.\ \frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{ec.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{ec.} \end{array} \right\} = \ldots$$

[0,785398163397448 ec. e perciò $\pi = 3,14159265358979$32 ec. (519).

631. Se dunque nelle serie di sopra (628) si faccia $a =$

$\frac{90^\circ}{m}$ e sia q il quadrante rettificato, verrà

$$sen\,\frac{90^\circ}{m}=\frac{q}{m}-\frac{q^3}{2.3m^3}+\frac{q^5}{2.3...5m^5}-\frac{q^7}{2.3...6.7m^7}+\text{ec.}$$

$$cos\,\frac{90^\circ}{m}=1-\frac{q^2}{2m^2}+\frac{q^4}{2.3.4m^4}-\frac{q^6}{2...5.6m^6}+\text{ec.}$$

$tang\,\frac{90^\circ}{m}=\frac{q}{m}+$ ec., $cot\,\frac{90^\circ}{m}=\frac{m}{q}-$ ec., essendo m un numero ad arbitrio. Avuti in tal guisa due seni e i loro coseni o in secondi o in primi o in gradi, si otterrà il seno e coseno della lor somma con le form. 12 e 13 fino a $sen\,30^\circ$, che dovendo essere $\frac{1}{2}$, servirà di riprova ai calcoli antecedenti.

632. Hanno altri usi l' equazioni $e^{\pm z\sqrt{-1}}=cos\,z\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,z$ (630): poichè 1°. riducono a seni le quantità immaginarie $a\pm b\sqrt{-1}$ se fatto $\frac{b}{a}=tang\,h$, onde $l(a\pm b\sqrt{-1})=la(1\pm\frac{b}{a}\sqrt{-1})=la+l(1\pm\sqrt{-1}\,.\,tang\,h)=$ (25) $la-l\,cos\,h\pm h\sqrt{-1}$, si osservi che $cos\,h$ ($=$ .... $\frac{sen\,h}{tang\,h}$) $=\frac{a}{b}\sqrt{(1-cos^2 h)}=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\frac{a}{c}$ fatto $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$; allora $l(a\pm b\sqrt{-1})=lc\pm h\sqrt{-1}=$ (630) $lc+l(cos\,h\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,h)=lc(cos\,h\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,h)$, ed $a\pm b\sqrt{-1}=c(cos\,h\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,h)$: 2°. riducono a seni anche le quantità esponenziali immaginarie $b^{\pm x\sqrt{-1}}$ che eguagliate ad $e^{\pm z\sqrt{-1}}$ onde $z=xlb$, divengono $cos(xlb)\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,(xlb)$: 3°. palesano immaginarj i logaritmi dei numeri negativi sol che si ponga $z=\pm(2n+1)\pi$, d' onde (618) $sen\,z=0$, $cos\,z=-1$ e $l-1=\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}$, sempre immaginario; mentre l' altro $l\,1=\pm 2n\pi\sqrt{-1}$ che si ha da $z=\pm 2n\pi$, è reale nel caso di $n=0$: 4°. danno perciò un' espressione di tali logaritmi atta al calcolo, facendo $l-a=la\pm l-1=la\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}$.

633. Ma l' uso immediato di quelle equazioni (630) consiste nel cangiare i seni e i coseni d' archi multipli in potenze di seni e coseni d' archi semplici, e reciprocamente. Quanto al problema diretto, se invece di a si scriva in es-

se ma, avremo $e^{\pm ma\sqrt{-1}} = \cos ma \pm \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, ma = (\cos a \pm \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m$; dunque $\mathrm{sen}\, ma = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\cos a + \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m - (\cos a - \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m)$, cioè

63'. $\mathrm{sen}\, ma = m \cos^{m-1} a \, \mathrm{sen}\, a - m \, . \, \frac{m-1}{2} \, . \, \frac{m-2}{3} \cos^{m-3} \times a \, \mathrm{sen}^3 a + m \, . \, \frac{m-1}{2} \, . \, \frac{m-2}{3} \, . \, \frac{m-3}{4} \, . \, \frac{m-4}{5} \cos^{m-5} a \, \mathrm{sen}^5 a -$ ec.; e $\cos ma = \frac{1}{2}((\cos a + \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m + (\cos a - \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m)$, cioè

64'. $\cos ma = \cos^m a - m \, . \, \frac{m-1}{2} \cos^{m-2} a \, \mathrm{sen}^2 a + m \, . \, \frac{m-1}{2} \, . \, \frac{m-2}{3} \, . \, \frac{m-3}{4} \cos^{m-4} a \, \mathrm{sen}^4 a -$ ec. E quanto al problema inverso, fatto $\cos a + \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a = p$, $\cos a - \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a = q$, onde $2 \cos a = p + q$, $2\sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a = p - q$, e perciò I $(2 \cos a)^m = (p+q)^m$, II $(2\sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, a)^m = (p-q)^m$, il binomio I, riuniti i termini a due a due (158), darà $2^m \cos^m a = p^m + q^m + m(p^{m-2} + q^{m-2}) pq + m \, . \, \frac{m-1}{2}(p^{m-4} + q^{m-4}) p^2 q^2 +$ ec., ove $p^m = \cos ma + \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, ma$, $q^m = \cos ma - \sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, ma$, e $p^m q^m = \cos^2 ma + \mathrm{sen}^2 ma = 1$; perciò

65'. $2^{m-1} \cos^m a = \cos ma + m \cos(m-2) a + m \, . \, \frac{m-1}{2} \cos(m-4) a +$ ec. presa la metà dei termini dovuti alla potenza m per la riunione di essi a due a due. Il binomio II darà $2^m (\sqrt{-1})^m \mathrm{sen}^m a = p^m \pm q^m - m(p^{m-2} \pm q^{m-2}) pq + m \, . \, \frac{m-1}{2}(p^{m-4} \pm q^{m-4}) p^2 q^2 -$ ec., coi segni di sopra se m è pari: in tal caso, fatto $m = 2n$, si ha $(\sqrt{-1})^{2n} = \pm 1$ (145): ma se $m = 2n-1$, si ha $(\sqrt{-1})^{2n-1} = \mp \sqrt{-1}$, onde poichè $p^m - q^m = 2\sqrt{-1} \, . \, \mathrm{sen}\, ma$, viene per m pari

66'. $2^{2n-1} \mathrm{sen}^{2n} a = \pm \cos 2na \mp 2n \cos 2(n-1) a \pm n(2n-$

$1)\cos 2(n-2)a \mp \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3} \cos 2(n-3)a \pm$ ec.: e per m impari

$67^2.\ 2^{2(n-1)} sen^{2n-1} a = \mp sen(2n-1)a \pm (2n-1) \times sen(2n-3)a \mp (2n-1)(n-1) sen(2n-5)a \pm \ldots . \frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)}{3} sen(2n-7)a \mp$ ec., presa al solito la metà dei termini dovuti alla potenza, e i segni di sopra se n è pari.

634. La form. 63^1. serve a dividere un dato arco ma in un numero m di parti eguali: fatto $sen\, ma = b$, $sen\, a = x$, $\cos a = z = \sqrt{(1-x^2)}$, ella diventa $b = mz^{m-1} x - m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} z^{m-3} x^3 +$ ec., e con $m = 2, 3, 4$ ec. dà le seguenti equazioni per dividere un arco

$b = 2x\sqrt{(1-x^2)}$	in 2 parti
$b = 3x - 4x^3$	3
$b = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-x^2)}$	4
ec. ec.	ec.

635. Di quì la risoluzione approssimata dell' equazioni di terzo grado nel caso irriducibile. Poichè se l' equazione $3x - 4x^3 = b = sen 3a = sen(180° - 3a) = - sen(180° + 3a)$ (618), che ha per radici $x = sen\, a$ (634), $= sen(60° - a)$, $= - sen(60° + a)$, si riduca alla vera forma $x^3 - \frac{3r^2 x}{4} + \frac{r^2 sen 3a}{4} = 0$ (609), e si paragoni alla data $x^3 - px + q = 0$ (quando q è negativo si fa $x = -y$), avremo $\frac{3}{4}r^2 = p$, $\frac{1}{4}r^2 sen 3a = q$, onde $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e $sen 3a = \frac{3q}{p}$; e poichè $r > sen 3a$, sarà $2\sqrt{\frac{1}{3}p} > \frac{3q}{p}$ e $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$, ciò che con p negativo forma il caso irriducibile (338); perciò *questo metodo risolve l' equazioni irriducibili di terzo grado*. Si avrà pertanto 1°. $\frac{3q}{p} (= sen 3a) = r . sen 3a$ (609),

e $sen\,3a = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$, con che si conosce $3a$ ed a: 2°. x ($=$ $sen\,a$) $= r.\,sen\,a = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen\,a$: 3°. $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen(60° - a)$: 4°. $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen\,(60° + a)$.

Esempj. I. Sia $x^3 - 3x + 1 = 0$, onde $p = 3, q = 1$, $sen\,3a = \frac{1}{2}$, $a = 10°$; dunque $x = 2\,sen\,10° = 0,347296$, $x = 2\,sen\,50° = 1,532089$, $x = -2\,sen\,70° = -1,879385$. II. Sia $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, onde $p = 1, q = \frac{1}{3}$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, a = 20°$; dunque $x = \frac{2\,sen\,20°}{\sqrt{3}} = 0,394931$, $x = \frac{2\,sen\,40°}{\sqrt{3}} = 0,742227$, $x = \frac{-2\,sen\,80°}{\sqrt{3}} = -1,137158$. III. Sia $x^3 - 5x + 3 = 0$, onde $p = 5, q = 3$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$, $a = 14°\,43'\,57''$; dunque $x = \frac{2\sqrt{5}.\,sen\,14°\,43'\,57''}{\sqrt{3}} = 0,656617$, $x = \frac{2\sqrt{5}.sen\,45°\,16'\,3''}{\sqrt{3}} = 1,834246$, $x = \frac{-2\sqrt{5}.\,sen\,74°\,43'\,57''}{\sqrt{3}} = -2,49085$.

Risoluzione dei Triangoli Rettilinei.

636. Ogni lato d'un triangolo iscritto al circolo è doppio del seno dell' angolo opposto (418 . 613): perciò *i lati d' un triangolo son come i seni degli angoli opposti*. Chiamati dunque g, g', g'' i lati BC, CA, AB, ed a, a', a'' gli angoli opposti, si avrà

100. I. $g : sen\,a = g' : sen\,a' = g'' : sen\,a''$. Quindi se $g'' < g$, sarà anche $a'' < a$ (428. 6°) ed $a'' < 90°$ (427): perciò *l' angolo opposto al minor dei lati*, è $< 90°$.

637. Fatta nel triangolo BAC la costruzione

spiegata altrove (443), e condotte ad AF prolungata in H, le normali BI, CH, sarà AFD ($= \frac{1}{2}$ DFE) + DFC ($= \frac{1}{2}$ DFG) + GFB ($= \frac{1}{2}$ GFE) $= \frac{1}{2}\, 360° = 180°$, onde GFB = HFC (perchè supplementi di AFC) e BFI = CFG. Ora essendo 1 il raggio, i triangoli rettangoli BGF, CHF, BIF, CGF danno (636) BF : BG :: 1 : *sen* BFG :: CF : CH, e BF : BI :: 1 : *sen* BFI :: CF : CG; dunque CH × BI = BG × GC = $(q-g')(q-g'')$ (444): ma AB : BI :: 1 : *sen* BAI, ed AC : CH :: 1 : *sen* CAI; dunque moltiplicando le due analogie, AB × AC : BI × CH ::

1 : *sen*² BAI, cioè 1°. $sen\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{g'g''}}$,

e quindi 2°. $cos\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{q(q-g)}{g'g''}}$, onde $tang\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{q(q-g)}}$.

638. Pongasi ora il valor di $q = \frac{1}{2}(g+g'+g'')$ nella 1°. equazione, e quadrando avremo $sen^2\,\frac{1}{2}a$ ($= \frac{1-cos\,a}{2}$ (31°.)) $= \frac{(g+g''-g')(g+g'-g'')}{4g'g''}$, e però

II. $2g'g''\,cos\,a = g'^2 + g''^2 - g^2$, in cui se si cangi reciprocamente g, a in g'', a'' per aver $2gg'\,cos\,a'' = g'^2 + g^2 - g''^2$, e vi si pongano i valori di g''^2 preso da questa, e di g preso dalla I, si troverà $2g'g'' \times cos\,a = 2g'^2 - \frac{2g'g''\,sen\,a\,cos\,a''}{sen\,a''}$, cioè

III. $tang\,a''\,(g' - g''\,cos\,a) = g''\,sen\,a$. Con queste tre formule si risolvono i triangoli obliquangoli.

639. Quanto ai rettangoli, sia a l'angolo retto, e chiamata h l'ipotenusa g, si ponga g e g' per g' e g'', a ed a' per a' ed a'': e poichè $sen\,a = 1$, $cos\,a = 0$, la Formula I darà $h = g : sen\,a = g' : sen\,a'$.

640. Dalla III si avrà $tang\,a' = g' : g$. E se invece di a si supponga retto a'', sarà $tang\,a'' = \infty$, e $g' - h\cos a = 0$.

641. Si son disposte queste Formule nelle seguenti Tavole: ma nei triangoli obliquangoli si avverta che dati due angoli, o datone uno e trovatone un altro, il terzo è dato (424); nei rettangoli poi dato un angolo acuto o due lati, è dato l'altr' angolo (427) o l'altro lato (475); e dati i due angoli acuti, si avrà solo la ragion dei lati senza conoscerne alcuno (432). Del resto i seni e coseni molto grandi variando con gran lentezza, non danno l'esatto valor dell'angolo e convien trasformarli; perciò con $\cos a = g' : h$ (640) si fa $h : g' :: 1 : \cos a$, ed $h - g' : h + g' :: 1 - \cos a : 1 + \cos a$, onde (624) $tang\,\frac{1}{2}a = \sqrt{(h - g')} : \sqrt{(h + g')}$, e l'angolo a si ha con precisione: le tangenti e cotangenti variando rapidamente, non hanno d'uopo di trasformazione.

TAVOLA I. PER I TRIANGOLI RETTANGOLI

I lati son g, g', gli angoli opposti a, a', l'ipotenusa è h. In generale IL significa l'*ipotenusa* e un *lato*, IA l'*ipotenusa* e un *angolo*, LAo un *lato* e l'*angolo opposto*, LAa un *lato* e l'*angolo adjacente*.

	Dati	Trovare	FORMULE
	IL		
642.	$\widehat{h}, \widehat{g}$	a	$sen\, a = g : h$ (639) ovvero $tang(45^\circ + \frac{1}{2} a) = \sqrt{(h+g)} : \sqrt{(h-g)}$ (641)
643.	h, g'	a	$cos\, a = g' : h$ (640) ovvero $tang \frac{1}{2} a = \sqrt{(h-g')} : \sqrt{(h+g')}$ (641)
	IA		
644.	$\widehat{h}, \widehat{a}$	g	$g = h\, sen\, a$ (639)
645.		g'	$g' = h \cos a$ (640)
646.	g, g'	a'	$tang\, a' = g' : g$ (640)
	LAo		
647.	$\widehat{g'}, \widehat{a'}$	h	$h = g' : sen\, a'$ (639)
648.		g	$g = g' : tang\, a'$ (640)
	LAa		
649.	$\widehat{g'}, \widehat{a}$	h	$h = g' : \cos a$ (640)
650.	g, a'	g'	$g' = g\, tang\, a'$ (640)

TAVOLA II. PER I TRIANGOLI OBLIQUANGOLI.

I lati son g, g', g'', gli angoli opposti a, a', a''. In generale LAL significa *due lati* e l'*angolo compreso*, LLA *due lati* e un *angolo opposto*, ALA *due angoli* e il *lato compreso*, AAL *due angoli* e un *lato opposto*.

	Dati	Trovare	FORMULE
651.	g, g', g''	a	$q = \frac{1}{2}(g + g' + g'')$ $tang \frac{1}{2} a = \sqrt{(q-g')(q-g'')} : \sqrt{q(q-g)}$ (637)
	LAL		
652.	$\widehat{g'}, \widehat{g''}, a$	g	$g = \pm\sqrt{(g'^2 + g''^2 - 2g'g'' \cos a)}$ (638)
653.		a''	$tang\, a'' = g''\, sen\, a : (g' - g'' \cos a)$ (638)
	LLA		
654.	$\widehat{g}, \widehat{g'}, a$	g''	$g'' = g' \cos a \pm \sqrt{(g^2 - g'^2 sen^2 a)}$ (638)
655.		a'	$sen\, a' = g'\, sen\, a : g$ (636)
	ALA AAL		
656.	$\widehat{a}, \widehat{a''}, g$ a'	g'	$g' = g\, sen\, a' : sen\, a$ (636)

Finiremo con alcuni Problemi per esercizio dei Principianti.

657. I. Trovare un angolo x la cui tangente sia n^{pla} del suo seno. *Ris.* $sen\,x = \frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n}$.

658. II. Dividere un dato angolo a in due angoli $x, a-x$ tali che i loro seni sieno nella ragion data di $m:n$ . . . .

Ris. $tang\,x = \frac{m\,sen\,a}{n+m\cos a}$.

659. III. Data la differenza d di due angoli $x, x+d$ e la ragione $m:n$ dei loro seni, trovare gli angoli. *Ris.* $tang\,x = \frac{n\,sen\,d}{m-n\cos d}$.

660. IV. Date le ragioni $n:1$ dei seni ed $m:1$ delle tangenti di due angoli x, z, trovare gli angoli. *Ris.* $tang\,x = \sqrt{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2-1}\right)}$, $tang\,z = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2-1}\right)} = \frac{1}{m}\,tang\,x$.

661. V. Supposti aritmeticamente proporzionali i seni di tre angoli p, m, u, determinare quali debbano essere gli angoli estremi p, u affinchè anche i coseni di tutti e tre sieno nella medesima proporzione. *Ris.* Gli angoli debbono esser tali che $p-u$ sia piccolissimo.

662. VI. Data l'equazione $(n+N)\,sen\,u = (n-N)\,sen\,p$ ove n, N son note e $sen\,m$ è medio proporzionale aritmetico tra $sen\,p$ e $sen\,u$, trovar l'angolo $p-u$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $p-u = \frac{1}{n}\,(2N\,tang\,m)$.

663. VII. Date l'equazioni $(n+N)\,sen\,h = sen\,u'$ ed $(n-N)\,sen\,g = sen\,p'$ ove si ha $\pm h \mp g = p-u$, N è nota, e son noti $sen\,m$, $sen\,i'$, $sen\,m'$ medj proporzionali aritmetici tra $sen\,p$ e $sen\,u$, tra $sen\,g$ e $sen\,h$, e tra $sen\,u'$ e $sen\,p'$, trovar l'angolo $u'-p'$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $u'-p' = \frac{2N\,sen(i' \pm m)}{\cos m \cos m'}$.

664. VIII. Con la regola di doppia falsa posizione trovare un arco x che sia metà della sua tangente, o calcolar l'equazione $2x = tang\,x$. *Ris.* $x = 66°\,46'\,54''\,14'''$.

665. IX. Con la regola stessa ricavare il valor dell'an-

golo x dall' equazione $sen\ 16' = \frac{2 sen\ x\ sen^2 \frac{1}{2} x}{cos\ 2x}$. *Ris.* $x =$ $11° 44' 42''$ incirca.

606. X. Con le formule del N°. 628. sommare in generale la serie $S = sen\ a + sen(a+b) + sen(a+2b) + ... + sen(a+nb)$, e determinar particolarmente S nel caso di $a+nb = (n+1)a = 90°$. *Ris.* In generale $S = ...$ $\frac{cos(a-\frac{1}{2}b) - cos[a+(n+\frac{1}{2})b]}{2 sen \frac{1}{2} b}$, in particolare $S = \frac{1}{2}(1 + cot \frac{1}{2} a)$.

667. XI. Risolver l' equazioni della forma $x^m \pm a^m = 0$. *Ris.* Il fattor generale della prima equazione si troverà $x^2 - 2ax\ cos \frac{2n+1}{m} \pi + a^2$, della seconda $x^2 - 2ax\ cos \frac{2n\pi}{m} + a^2$, ove $n = 0, = 1, = 2, = 3$ ec. e $\pi = 180°$.

668. XII. Un Vascello si avanzò di 50 miglia verso Levante, e di 116 verso Tramontana. Si cerca la posizione e la lunghezza del viaggio o della linea retta per cui ha camminato. *Ris.* Il vascello è andato per una strada che fa un angolo di $23° 19' 4''$ con la direzione di tramontana, ed ha di lunghezza 126 miglia in circa.

669. XIII. Data l' area s e uno degli angoli acuti a d' un triangolo rettangolo trovarne i lati x, y e l' ipotenusa z.

Ris. $x = \sqrt{\frac{2s\ tang\ a}{r}}, y = \sqrt{\frac{2s\ cot\ a}{r}}, z = 2\sqrt{\frac{rs}{sen\ 2a}}$.

670. XIV. Dati i lati $CA = a$, $AH = b$ e gli angoli $ACB = m$, $AHB = n$, $CBH = r$ d' un quadrilatero, trovar l'angolo CBA e la diagonale AB. *Ris.* 1°. $cot\ CBA = \frac{a\ sen\ m\ cos\ r \pm b\ sen\ n}{a\ sen\ m\ sen\ r}$, ove il segno $-$ vale per il quadrilatero ACBH': 2°. $AB = \frac{a\ sen\ m}{sen\ CBA}$. 104.

671. XV. Dati due circoli concentrici NPK, QRF con la tangente in Q e la corda QR nel minore, e condotta dal punto N la NK parallela a QR, la NE normale ad NP e la NL che formi l' angolo LNE = ENK, trovar la ragione di NK + NL a QR. *Ris.* La ragione è dupla. 9.

FIG. 104.

672. XVI. Data la retta AC comune sezione di due piani triangolari ACB, ACD tali che la retta BD condotta per i due vertici sia normale al piano ACD, e dati oltre al triangolo ACB gli angoli d' inclinazione BCD $= m$, BAD $= n$, determinare il triangolo ACD, o sia *trovare sul piano indeterminato* MAR *il piano o triangolo di riduzione* ACD *del triangolo* ACB. *Ris.* Fatti gli angoli CAB $= a$, ABC $= b$, ACB $= c$, si troverà $\cos$ ACD $= \frac{\cos c}{\cos m}$, $\cos$ CAD $= \frac{\cos a}{\cos n}$,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \text{CDA} = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+m-n) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+n-m)}{\cos m \cos n}\right)},$$

e poichè è data AC, si avrà di quì tutto il resto.

TRIGONOMETRIA SFERICA.

673. SE il semicircolo PAp formi la sfera $APap$ (546), di tutte l'ordinate il solo raggio AC descriverà un *circolo massimo* (547), e l'altre altri *circoli paralleli* tanto minori quanto più esse diminuiscono (548). Quindi la sfera ha un'infinità di circoli e massimi e minori (547): ma non usandosi quest' ultimi perchè ineguali, col nome di *circoli* e d'*archi* intenderemo in avvenire i circoli massimi e i loro archi. Ora la *Trigonometria Sferica* risolve i *Triangoli Sferici*, come $ANMBA'$, formati sulla superficie della sfera da tre circoli che si segan tra loro, ed hanno per centro il centro C della sfera: l'altro maggior triangolo $ApaPA'BMNA$ le cui parti son date da quelle di $ANMBA'$, non si considera. 101.

674. Un diametro Pp normale ad un circolo AMa, è l'*asse* di questo circolo, e le sue estremità P, p ne sono i *poli*. Ogni altro circolo $A'Ma'$ con diverso asse $P'p'$ ha poli diversi P', p': per altro il punto A' e il polo P' si allontanano egualmente l'uno dal punto A, l'altro dal polo P, e perciò $AA' = PP'$.

675. Dunque l'asse Pp farà sul circolo AMa tanti angoli retti quanti son raggi in esso, e gli archi PA, Pa che misuran quest'angoli, saranno di 90°: onde 1°. l'arco tra il polo d'un circolo e ogni punto della sua circonferenza, è di 90°: 2°. gli archi PA, Pa in un piano medesimo con la normale PC son normali alla circonferenza AMa: 3°. i due punti A, P bastando a determinar la posizione d'un circolo che dee passar per C (533), *due archi* PA, Pa *di* 90°, *due archi normali ad* AMa, *o anche un solo arco di* 90° *e normale, determinano il polo* P *di* AMa.

676. Il centro C comune ai circoli della sfera (673), dà per loro intersezione un diametro Aa: perciò 1°. se due circoli APa, AOa si son tagliati in A, non si taglieranno più che in a a 180° da A: 2°. onde due soli archi non chiudono spazio se non è ciascuno di 180°.

677. Si formi ora l'angolo sferico AMA' con l'incon-

FIG. 101. tro in M dei due archi AM, A'M prolungati, se occorra, fino a 90°. Condotte nei piani ANMC, A'BMC due normali da un punto stesso della comune intersezione CM, l'angolo da esse compreso misurerà l'inclinazion de' due piani o l'angolo AMN (534): ma questa inclinazione è anche determinata da quella degli assi, cioè dall'angolo PCP' o dall'arco PP' = AA' (674); dunque *la misura d'un angolo sferico* AMA' *sarà l'arco del circolo* AA', *compreso dai suoi lati a* 90° *dal vertice* M

678. Dunque 1°. ogn'angolo sferico, e molto più la differenza di due, è < 180°: 2°. un arco che cade sopra d'un altro, ha gli angoli intorno = 180°: 3°. prolungato quest'arco, gli angoli opposti sono eguali, e la somma degli angoli sferici intorno ad un punto è 360°: 4°. l'angolo sferico AMA' (= ACA') superando (430) quello delle corde AM, A'M più lunghe dei raggi AC, A'C (475), i tre angoli d'un triangolo sferico son > 180° (424): ma poichè ognun di essi è < 180°, saranno i tre < 540°.

679. La somma degli angoli d'un triangolo sferico cade dunque tra 180° e 540°, nè può, come nel rettilineo, dedursi il valor del terz'angolo dagli altri due; quindi i tre angoli possono essere ottusi, retti o acuti, e *la somma di due è* > 90° *se l'altro sia* = 90° *o* < 90°.

680. Quanto poi ai lati d'un triangolo sferico, giacchè di quanti archi posson condursi per due punti P, A della superficie, il minimo appartiene ad un circolo massimo (509), gli archi dei circoli massimi sulla superficie sferica saranno, per quanto lo soffre la lor natura, come le linee rette sul piano: e quindi 1°. quest'archi o i loro angoli misurano sulla supetficie sferica le distanze, dette perciò *angolari*: 2°. nel triangolo sferico la somma di due lati supera il terzo, onde $Ea + Fa > FE$; e poichè $AE + AF + Ea + Fa = 360°$ (676) e perciò $AE + AF + FE < 360°$, un lato non può giungere a 180° (676) nè la somma dei tre a 360°: 3°. due triangoli sferici sono eguali o abbian tre lati eguali a tre lati, o due eguali a due con l'angolo compreso eguale, o uno eguale a uno con eguali angoli sopra: 4°. perciò un triangolo o isoscele o isogonio, preso due volte e paragonato da parti opposte, ha eguali o i suoi angoli sulla base o i suoi lati: 5°. e fatto col tagliare il maggior angolo d'un triangolo scaleno, un triangolo isogonio, al maggior angolo si vedrà opposto il maggior lato ec.

681. Dovendo tutti i circoli della sfera segarsi scambievolmente (673), non si danno in essa triangoli simili o con

lati paralleli: onde due triangoli sferici equiangoli sono eguali; poichè se soprapposti non coincidessero, avrebbero le basi parallele.

682. Infine il triangolo sferico è o *rettangolo* o *obliquangolo*. Quanto al primo, sia egli HDF, cioè sull'arco HDNC insista normalmente l'arco DFOC. Si prolunghi HF e per I, L, a 90° da H, si conduca l'arco ILMB. E' chiaro che gli angoli retti in D, I danno M per polo di DI (675.3°.) ed MI = MD = 90°: perciò se DF divenga o DM = 90° o DO > 90°, anche IL (= H) diverrà o IM = 90° o IB > 90°, cioè *nel triangolo rettangolo l'angolo obliquo è della stessa specie del lato opposto*: onde DF < o > 90° dando H < o > D e quindi DF < o > FH (677.5°.), sarà DF il più corto o il più lungo di quanti archi posson condursi da F a DH. E' anche chiaro che se ciascun de' lati HD, DF è < 90°, l'ipotenusa HF (< HL = 90°) sarà < 90°; se ciascun de' lati CF, CI è > 90°, l'ipotenusa IF che incontra i lati di là da 90°, sarà pur < 90°; e se l'un de' lati CN è < 90° e l'altro CF > 90°, l'ipotenusa NF (> NL = 90°); sarà > 90°, onde *i lati della stessa o di diversa specie hanno l'ipotenusa < o > 90°*. Perciò gli angoli obliqui omogenei ai lati opposti, indicano la specie dell'ipotenusa, e reciprocamente: così l'ipotenusa e un lato di simile o di diversa specie danno l'altro lato < o > 90°. Ma se un lato intorno all'angolo retto è 90°, anche l'ipotenusa sarà 90° (675.3°.) e il terzo lato può essere o >, o =, o < 90°. 102.

683. Quanto al triangolo obliquangolo, sia egli ACB, e da' suoi vertici come poli si descrivano e si prolunghino fino all'incontro gli archi FE, ED, DF. Poichè A, C sono a 90° dal punto stesso F, sarà F il polo di AC, e D, E lo saranno di CB, BA (675.3°.): perciò prolungati in G, H i lati di ACB fino all'incontro di DF, sarà DH = FG = 90° (675), e DH + FG = DF + GH = 180°, onde DF sarà il supplemento di GH = C (677), come FE, ED lo saranno di A, B. Essendosi poi fatto AK = BM = 90°, sarà AK + BM = MK + AB = 180°, onde AB sarà il supplemento di MK = E, come BC, CA lo saranno di D, F. Dunque il triangolo DEF è *supplementario* di ACB, ed avendosi, per esempio, B = 180° − DE, sarà (618) *sen* B = *sen* DE, *cos* B = − *cos* DE, $sen \frac{1}{2} B = cos \frac{1}{2} DE$, ove in generale se $\frac{1}{2} m > 90°$, sarà $sen \frac{1}{2} m = - cos \frac{1}{2} n$ (611), posto n il supplemento di m, 103.

Risoluzione dei Triangoli Sferici.

102. 684. Da un angolo F del triangolo HGF si cali l' arco normale FD, e dal centro E partano i raggi EF, ED, EH: e da F scenda sul piano DHE la normale FA ed il piano FAK incontri normalmente HE in K, i triangoli FAE, FAK, FKE saranno rettangoli e fatto 1 il raggio, daranno AF : FE :: *sen* FEA : 1, AF : FK :: *sen* FKA : 1, KF : FE :: *sen* FEK : 1; onde *sen* FEK : 1 :: *sen* FEA : *sen* FKA: ma *sen* FEK = *sen* FH, *sen* FEA = *sen* FD (608), e *sen* FKA = *sen* H (677); dunque *sen* FH : 1 :: *sen* FD : *sen* H; dunque nell' altro triangolo, rettangolo FDG sarà del pari *sen* FG : 1 :: *sen* FD : *sen* G; dunque nel total triangolo HFG sarà *sen* H : *sen* G :: *sen* FG · *sen* FH. Chiamati pertanto g, g', g'' i lati del triangolo, ed a, a', a'' gli angoli opposti ad essi, si avrà

I. $sen\,g : sen\,a = sen\,g' : sen\,a' = sen\,g'' : sen\,a''$.

685. Dunque $sen\,a + sen\,a' : sen\,a \backsim sen\,a' :: sen\,g + sen\,g' : sen\,g \backsim sen\,g'$, e però (623) $\dfrac{tang\,\frac{1}{2}(a+a')}{tang\,\frac{1}{2}(g+g')} = \ldots\ldots$ $\dfrac{tang\,\frac{1}{2}(a \backsim a')}{tang\,\frac{1}{2}(g \backsim g')}$; e poichè il secondo membro è sempre positivo (678), i due termini del primo hanno il segno stesso, e *le semisomme di due lati e degli angoli a loro opposti son della stessa specie.*

686. Ora essendo i seni degli angoli come i lati opposti nella Trigonometrìa rettilinea (636), e come i loro seni nella sferica (684), se presi i seni dei lati in vece dei lati, si applichi a questa il raziocinio già fatto in quella (637), verrà 1ª. $sen\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{sen(q-g')\,sen(q-g'')}{sen\,g'\,sen\,g''}}$, 2ª. $cos\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{sen\,q\,sen(q-g)}{sen\,g'\,sen\,g''}}$, formule che il triangolo supplementario (683) (fatta m la metà della somma degli angoli) cangia in 3ª. $cos\,\frac{1}{2}g = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{\dfrac{cos(m \backsim a')\,cos(m \backsim a'')}{sen\,a'\,sen\,a''}}$, 4ª. $sen\,\frac{1}{2}g = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{\dfrac{-cos\,m\,cos(m \backsim a)}{sen\,a'\,sen\,a''}}$: e divisa la 1ª. per la 2ª., e la 3ª. per

per la 4ª., viene $tang \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{sen(q-g')\, sen(q-g'')}{sen\, q\, sen(q-g)}}$,

$cot \frac{1}{2} g = \sqrt{\frac{cos(m \backsim a')\, cos(m \backsim a'')}{-\cos m \cos(m \backsim a)}}$, ove il radicale non è immaginario perchè $m > 90°$.

687. Pongasi ora il valor di $q = \frac{1}{2}(g + g' + g'')$ nella 1ª. equazione di sopra, e quadrando avremo $sen^2 \frac{1}{2} a (= \frac{1 - \cos a}{2} (622)) = \frac{sen \frac{1}{2}(g + g'' - g')\, sen \frac{1}{2}(g + g' - g'')}{sen\, g'\, sen\, g''} =$ (620) $\frac{cos(g' \backsim g'') - \cos g}{2\, sen\, g'\, sen\, g''} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(614) $\frac{cos\, g' \cos g'' + sen\, g'\, sen\, g'' - \cos g}{2\, sen\, g'\, sen\, g''}$, onde

II. $\cos a\, sen\, g'\, sen\, g'' = \cos g + \cos g' \cos g''$, che il triangolo supplementario trasforma in

III. $\cos g\, sen\, a'\, sen\, a'' = \cos a + \cos a' \cos a''$. Onde giacchè $\cos a$ e $\cos g$ hanno lo stesso segno o danno a, g della stessa specie finchè $\cos g > \cos g' \cos g''$ e $\cos a > \cos a' \cos a''$, cioè finchè g' o g'' ovvero a' o a'' hanno il noto valore *intermedio* (618), si conchiuderà che *un angolo o lato è della stessa specie del lato o angolo opposto se l' un de' lati o angoli adjacenti sia medio tra quel lato o angolo opposto ed il suo supplemento*. La regola inversa non ha luogo.

688. Fatto nella II $tang\, g'' \cos a = tang\, \varphi$, verrà $sen\, g' \times tang\, \varphi = \frac{\cos g}{\cos g''} - \cos g'$, e riducendo, $\cos g = \cos g'' \cos(g' \backsim \varphi) : \cos \varphi$.

689. E fatto nella III. $tang\, a'' \cos g = cot\, \varphi$, verrà $sen\, a' \cot \varphi = \frac{\cos a}{\cos a''} + \cos a'$, e riducendo, $\cos a = \cos a'' \times sen(a' - \varphi) : sen\, \varphi$.

690. Che se nella II si ponga reciprocamente g'', a'' per g, a, onde si abbia $\cos a''\, sen\, g'\, sen\, g = \cos g'' - \cos g' \times \cos g$, sostituiti nella II. i valori di $\cos g''$ preso da questa

e di $sen\,g''$ preso dalla I, si troverà $cot\,a\,sen\,a'' = \frac{cot\,g}{sen\,g'}$ (1 — $cos^2 g'$) — $cos\,g'\,cos\,a''$, cioè

IV. $cot\,a\,sen\,a'' = cot\,g\,sen\,g' - cos\,g'\,cos\,a''$, ove fatto $cot\,g : cos\,a'' = cot\,\varphi$, verrà $cot\,a\,tang\,a'' = cot\,\varphi\,sen\,g' - cos\,g'$ e riducendo, $cot\,a = cot\,a''\,sen\,(g' - \varphi) : sen\,\varphi$. Fatto pure $cot\,a : cos\,g' = tang\,\varphi$, verrà $tang\,\varphi\,sen\,a'' = cot\,g\,tang\,g' - cos\,a''$, e riducendo, $cot\,g = cot\,g'\,cos(a'' \backsim \varphi) : cos\,\varphi$. Con queste formule si risolvono i triangoli obliquangoli.

691. Quanto ai rettangoli, sia a l' angolo retto, e chiamata h l' ipotenusa g, si prendano g, g', a, a' per g', g'', a', a'', e poichè $sen\,a = 1$, $cos\,a = cot\,a = 0$, la Formula I darà $sen\,h = sen\,g : sen\,a$. D'onde s' impara che come $1 > sen\,a$, così $sen\,h > sen\,g$, e *l' ipotenusa eccederà o sarà ecceduta dal lato, secondo che egli sarà* $<$ o $>$ $90°$ (611). Del resto se i seni o coseni di queste e delle seguenti formule sieno molto grandi, il loro esatto valore si avrà o dalla solita trasformazione (641), o da qualche altra formula che indicheremo nella seguente Tavola: così da $1 : sen\,h :: sen\,a : sen\,g$, viene $\frac{1 + sen\,h}{1 - sen\,h} = \ldots$ $\frac{sen\,a + sen\,g}{sen\,a - sen\,g}$, cioè (634.623) $tang(45° + \frac{1}{2}h) = \pm \ldots$ $\sqrt{tang\,\frac{1}{2}(a+g)\,cot\,\frac{1}{2}(a-g)}$: e nel modo stesso $sen\,a = sen\,g : sen\,h$ diventa $tang\,(45° + \frac{1}{2}a) = \pm \sqrt{tang\,\frac{1}{2}(h+g)\,cot\,\frac{1}{2}(h-g)}$, ove il doppio segno è determinato dalla proprietà del lato (682).

692. La formula II dà $cos\,h = cos\,g\,cos\,g'$, che si trasforma (691) in $tang\,\frac{1}{2}g = \sqrt{tang\,\frac{1}{2}(h+g)\,tang\,\frac{1}{2}(h-g)}$, ove il doppio segno è inutile perchè $\frac{1}{2}g < 90°$ (680).

693. La Formula III dà $cos\,h = cot\,a\,cot\,a'$, che ridotta ad $\frac{1}{cos\,h} = \frac{tang\,a}{cot\,a'}$, diviene $\frac{1 - cos\,h}{1 + cos\,h} = \frac{-(cot\,a' - tang\,a)}{cot\,a' + tang\,a}$

e quindi (625.622.) $tang \frac{1}{2} h = \sqrt{-\cos(a' + a)} : \sqrt{\cos(a' \backsim a)}$.

694. La Formula IV. dà $\cos a' = tang\, g \cot h$, che si trasforma al solito (691).

695. Ma se in vece di a si supponga retto a'', la Formula III darà $\cos g = \cos a : sen\, a'$, che al solito può ridursi (691).

696. Supposto sempre a'' retto, la Formula IV dà $\cot a = \cot g\, sen\, g'$, da cui s' impara che come $1 > sen\, g'$, così $\cot g > \cot a$ o $tang\, a > tang\, g$: onde *l' angolo obliquo* $<$ o $> 90^\circ$ *eccederà o sarà ecceduto dal lato opposto* (611).

Tutte queste formule si son disposte per maggior comodo nelle due Tavole seguenti.

TAVOLA I.

Per i triangoli sferici rettangoli

*Tutto è quì come nei rettangoli rettilinei. Il segno * indica gli archi della stessa specie* (682), *e il segno ** i casi dubbj di cui nell' Applicazioni*.

	Dati	Trovare	FORMULE
697.	IL	g'	$\cos g' = \cos h : \cos g$, ovvero $\tan g \frac{1}{2} g' = \sqrt{\tan g \frac{1}{2}(h+g) \tan g \frac{1}{2}(h-g)}$ (692)
698.	h, g	a	$\operatorname{sen} a^* = \operatorname{sen} g^* : \operatorname{sen} h$, ovvero $\tan g (45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\tan g \frac{1}{2}(h+g) \cot \frac{1}{2}(h-g)}$ (691)
699.		a'	$\cos a' = \tan g\, g \cot h$, ovvero $\tan g \frac{1}{2} a' = \sqrt{\operatorname{sen}(h-g)} : \sqrt{\operatorname{sen}(h+g)}$ (694)
700.	IA $\widehat{h}, \widehat{a}$	g	$\operatorname{sen} g^* = \operatorname{sen} h \operatorname{sen} a^*$ (691), ovvero da h, a ho a' (701), e da h, a' ho g (702)
701.		a'	$\cot a' = \cos h : \cot a$ (693)
702.	h, a'	g	$\tan g\, g = \cos a' : \cot h$ (694)
703.	g, g'	h	$\cos h = \cos g \cos g'$ (692), ovvero da g, g' ho a (704) e da g, a ho h (705)
704.		a	$\cot a = \cot g \operatorname{sen} g'$ (696)
705.	LAo	h^{**}	$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} g : \operatorname{sen} a$, ovvero $\tan g (45^\circ + \frac{1}{2} h) = \pm \sqrt{\tan g \frac{1}{2}(a+g) \cot \frac{1}{2}(a-g)}$ (691)
706.	g, a	g'^{**}	$\operatorname{sen} g' = \cot a : \cot g$, ovvero $\tan g (45^\circ + \frac{1}{2} g') = \pm \sqrt{\operatorname{sen}(a+g)} : \sqrt{\operatorname{sen}(a-g)}$ (696)
707.		a'^{**}	$\operatorname{sen} a' = \cos a : \cos g$, ovvero $\tan g (45^\circ + \frac{1}{2} a') = \pm \sqrt{\cot \frac{1}{2}(a+g) \cot \frac{1}{2}(a-g)}$ (695)
708.	LAa	h	$\cot h = \cos a' : \tan g\, g$ (694)
709.	$\widehat{g}, \widehat{a'}$	a	$\cos a = \cos g \operatorname{sen} a'$ (695), ovvero da g, a' ho h (708), e da g, h ho a (698)
710.	g', a	g	$\cot g = \cot a : \operatorname{sen} g'$ (696)
711.	a, a'	h	$\cos h = \cot a \cot a'$, ovvero $\tan g \frac{1}{2} h = \sqrt{-\cos(a'+a)} : \sqrt{\cos(a' \backsim a)}$ (693)
712.		g	$\cos g = \cos a : \operatorname{sen} a'$ (695), ovvero da a, a' ho h (711), e da a', h ho g (702)

FIG.

Applicazioni. I. Sia (697) $h = 127° 25' 20''$, $g = 13° 17' 25''$. Poichè $\cos h > 90°$ è negativo (611), verrà $l\,sen\, 37° 25' 20'' - l \cos 13° 17' 25'' = 9,7954676 = l - \cos g' = l - \cos 51° 21' 41'' = l \cos 128° 38' 19''$ (618), e $g' = 128° 38' 19''$. I logaritmi di $-sen$, $-\cos$ non son di numeri negativi (618).

II. Sia (699) $h = 127° 25' 20''$, $g = 128° 38' 19''$; dunque $\cos a' = -\cot 38° 38' 19'' \times -tang\, 37° 25' 20''$, e però $\cos a$ sarà positivo e $< 90°$, cioè $a = 16° 49' 31''$. In questi casi la sola attenzione ai segni indica la specie degli archi.

III. Sia (700) $h = 81° 13'$, $a = 37° 19'$; dunque $l\,sen\, 81° 13' + l\,sen\, 37° 19' = 9,7775070 = l\,sen\, g$ e $g = 36° 48' 22'',4$ ovvero $g = 143° 11' 37'',6$ (613): ma dovendo g, a esser della stessa specie, ha luogo il primo valore. S' impari da quest' esempio a valutare anche i decimi di secondo, senza di che si farebbero spesso errori considerabili.

IV. Sia (705) $g = 13° 17' 20''$, $a = 25°$; dunque $l\,sen\, 13° 17' 20'' - l\,sen\, 25° = 9,7355170 = l\,sen\, h$: perciò $h = 32° 56' 57'',7$ ovvero $h = 147° 3' 2'',3$, ed il caso è dubbio se per determinare h non si sappia la specie degli angoli obliqui (682). E' dubbio anche il caso di a o $a' = 90°$, e solo si saprà che l' altr' angolo eguaglia il suo lato opposto: così se $H = D = 90°$, sarà $FD = FH = 90°$, ed $F = DH$ (677) indeterminato. E' però raro che in pratica non resti la soluzione in qualche modo determinata.

102.

TAVOLA II.

PER I TRIANGOLI SFERICI OBLIQUANGOLI.

Tutto è quì come negli obliquangoli rettilinei e nella Tavola antecedente.

	Dati	Trovare	FORMULE
713.	g, g', g''	a	$\left(\begin{array}{l} q = \frac{1}{2}(g + g' + g'') \\ \text{tang}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(q - g')\,\text{sen}\,(q - g'')}{\text{sen}\,q\,\text{sen}\,(q - g)}} \end{array}\right)$ (686)
	LAL		
714.	$\widehat{g'}, \widehat{g''}, \widehat{a}$	g	$\left(\begin{array}{l} \text{tang}\,g''\cos a = \text{tang}\,\varphi \\ \cos g = \cos g''\cos(g' \backsim \varphi) : \cos\varphi \end{array}\right)$ (688)
715.	g, g', a''	a	$\left(\begin{array}{l} \cot g : \cos a'' = \cot\varphi \\ \cot a = \cot a''\,\text{sen}\,(g' - \varphi) : \text{sen}\,\varphi \end{array}\right)$ (690)
	LLA		
716.	$\widehat{g}, \widehat{g''}, \widehat{a}$	g'^{**}	$\left(\begin{array}{l} \text{tang}\,g''\cos a = \text{tang}\,\varphi \\ \cos(g' \backsim \varphi) = \cos g\cos\varphi : \cos g'' \end{array}\right)$ (688)
717.	g, g', a	a'^{**}	$\text{sen}\,a' = \text{sen}\,g'\,\text{sen}\,a : \text{sen}\,g$ (684)
718.		a''^{**}	$\left(\begin{array}{l} \cot a : \cos g' = \text{tang}\,\varphi \\ \cos(a'' \backsim \varphi) = \cot g\cos\varphi : \cot g' \end{array}\right)$ (690)
719.	a, a', a''	g	$\left(\begin{array}{l} m = \frac{1}{2}(a + a' + a'') \\ \cot\frac{1}{2}g = \sqrt{\frac{\cos(m \backsim a')\cos(m \backsim a'')}{-\cos m\cos(m \backsim a)}} \end{array}\right)$ (686)
	ALA		
720.	$\widehat{a'}, \widehat{a''}, \widehat{g}$	a	$\left(\begin{array}{l} \text{tang}\,a''\cos g = \cot\varphi \\ \cos a = \cos a''\,\text{sen}\,(a' - \varphi) : \text{sen}\,\varphi \end{array}\right)$ (689)
721.	a, a'', g'	g	$\left(\begin{array}{l} \cot a : \cos g' = \text{tang}\,\varphi \\ \cot g = \cot g'\cos(a'' \backsim \varphi) : \cos\varphi \end{array}\right)$ (690)
	AAL		
722.	$\widehat{a}, \widehat{a''}, \widehat{g}$	a'^{**}	$\left(\begin{array}{l} \text{tang}\,a''\cos g = \cot\varphi \\ \text{sen}\,(a' - \varphi) = \cos a\,\text{sen}\,\varphi : \cos a'' \end{array}\right)$ (689)
723.		g''^{**}	$\text{sen}\,g'' = \text{sen}\,g\,\text{sen}\,a'' : \text{sen}\,a$ (684)
724.		g'^{**}	$\left(\begin{array}{l} \cot g : \cos a'' = \cot\varphi \\ \text{sen}\,(g' - \varphi) = \cot a\,\text{sen}\,\varphi : \cot a'' \end{array}\right)$ (690)

Applicazioni. I. Sia (716) $a = 42° 15' 3'',3$, $g = 50° 10' 30''$, $g'' = 76° 35' 36''$; si troverà $\varphi = 72° 9' 2'',7$, $\cos(g' \backsim \varphi) = 32° 9' 3'',3$, caso dubbio, non sapendosi se questo sia il valor di $g' - \varphi$ o di $\varphi - g'$; nel primo caso $g' = 32° 9' 3'',3 + \varphi = 104° 18' 6''$, nel secondo $g' = \varphi - 32° 9' 3'',3 = 39° 59' 59'',4$; perciò è dubbia anche la formula 718.

II. Sia (720) $a' = 42° 15' 13'',3$, $a'' = 34° 15' 3''$, $g = 76° 35' 36''$; si troverà $\varphi = 81° 1' 42'',8$, onde $a' - \varphi = - 38° 46' 29'',5$; di quì $\cos a = - \cos 58° 23' 40'' = \cos 121° 36' 20''$ (618), onde $a = 121° 36' 20''$.

III. Sia (722) $a = 42° 15' 13'',3$, $a'' = 121° 36' 20''$, $g = 50° 10' 30''$; poichè $\tang 121° 36' 20'' = - \cot 31° 36' 20''$, verrà $\cot \varphi = - \cot 43° 51' 16'',7$ e $\varphi = - 43° 51' 16'',7$. Quindi essendo $\cos a'' = - \sen 31° 36' 20''$, si avrà $\sen(a' - \varphi) = \frac{\cos 42° 15' 13'',3 \times - \sen 43° 51' 16'',7}{- \sen 31° 36' 20''}$ positivo, ed $a' - \varphi = 78° 6' 20''$ ovvero $= 101° 53' 40''$; onde $a' = 34° 15' 3'',3$ ovvero $= 58° 2' 23'',3$.

IV. Sia (723) $a = 61° 25'$, $a'' = 82° 36'$, $g = 59° 40'$; si troverà $g'' = 77° 5' 12''$ ovvero $= 102° 54' 48''$. Il caso perciò è dubbio se non si conosca la specie di g'' o non la fissi uno dei due noti teoremi (685.687): ma il secondo non serve, perchè a non è medio tra a'' e il suo supplemento; e ben si vede che la regola inversa non ha luogo, perchè a non è medio, e intanto a'', g son della stessa specie. Neppur serve il primo, perchè le semisomme dei lati ed angoli opposti vengono $< 90°$ con ambedue i valori di g''. Se fosse $a = 79° 35' 13''$, $a'' = 77° 0' 26''$, $g = 53° 17' 7''$, l'uno e l'altro teorema toglierebbe il dubbio e darebbe $g'' = 52° 34' 40''$.

V. Sia (724) come prima $a = 42° 15' 13'',3$, $a'' = 121° 36' 20''$, $g = 50° 10' 30''$: avremo $\cos a'' = - \sen 31° 36' 20''$ e $\varphi = - 32° 8' 50''$; dunque poichè $\cot a'' = - \tang 31° 36' 20''$, si avrà $\sen(g' - \varphi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\cot 42° 15' 13'',3 \times - \sen 32° 8' 50''}{- \tang 31° 36' 20''}$ positivo, e $g' - \varphi = 72° 9'$ ovvero $= 107° 51'$; onde $g' = 40° 0' 10''$ ovvero $= 75° 42' 10''$.

725. Molte di queste formule si cangiano in quelle dei triangoli rettilinei col suppor gli sferici molto piccoli, e però i seni e le tangenti confuse coi lati, e i coseni con l'unità: se però in una formula entrino più coseni, dovrà spesso farsi $\cos a = 1 - \frac{1}{2} a^2$ (727), trascurando poi nei prodotti, come infinitesime, le quantità che eccedono il se-

condo grado. Eccone gli esempj: 1°. $\cos a = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\cos g - \cos g' \cos g''}{\operatorname{sen} g' \operatorname{sen} g''}$ (687) si cangia in $\cos a = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1-\frac{1}{2}g^2-(1-\frac{1}{2}g'^2)(1-\frac{1}{2}g''^2)}{g'g''} = \frac{g'^2+g''^2-g^2}{2g'g''}$ (638): 2°. $\cos a' = \frac{\operatorname{tang} g}{\operatorname{tang} h}$ (699) diventa $\cos a = \frac{g}{h}$ (643): 3°. $\cos h = \cos g \cos g'$ (703) si trasforma in $1 - \frac{1}{2}h^2 = (1 - \frac{1}{2}g^2)(1 - \frac{1}{2}g'^2)$, onde $h^2 = g^2 + g'^2$ (474).

726. Con tal mezzo si ha l' error commesso nel trattar come rettilinei i triangoli sferici all'uso degli Astronomi: poichè prese le note formule di $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ ec. (628), e diviso per r'' (522) il lato o arco che si vuole in parti di raggio, l' error cercato e moltiplicato per r'' (522) verrà espresso in secondi. Così dati h, a si trova 1°. $\operatorname{sen} g = \operatorname{sen} h \times \operatorname{sen} a$ (700) cioè (628) $g - \frac{1}{6}g^3 = \operatorname{sen} a (h - \frac{1}{6} h^3)$, onde $g^3 = h^3 \operatorname{sen}^3 a$ (soppresse le più alte potenze); dunque $g = h \operatorname{sen} a - \frac{1}{6} h^3 \operatorname{sen} a (1 - \operatorname{sen}^2 a)$: ma $g = h \operatorname{sen} a$ (644)); dunque $e = -\frac{h^3}{r''^3} \times \frac{\operatorname{sen} a \cos^2 a}{6} r'' = -\frac{h^3 \operatorname{sen} a \cos^2 a}{6r''^2}$: 2°. $\operatorname{tang} g = \operatorname{tang} h \cos a'$ (702), cioè (628) $g + \frac{1}{3}g^3 = \cos a' (h + \frac{1}{3} h^3)$, onde $g^3 = h^3 \cos^3 a'$, e $g = h \cos a' + \frac{1}{3} h^3 \cos a' (1 - \cos^2 a')$: ma $g = h \cos a'$ (645); dunque $e = \frac{h^3 \cos a' \operatorname{sen}^2 a'}{3r''^2}$: 3°. $\cot a' = \cos h \operatorname{tang} a$ (701) $= \operatorname{tang} a (1 - \frac{1}{2} h^2)$ (628); e poichè $a' = 90° - a$ (427.4°), sarà $\cot a' = \cot (90° - a + e) = \cot (90° - (a - e)) = \operatorname{tang} (a - e)$ (618); dunque $\operatorname{tang} (a - e) = \operatorname{tang} a \times (1 - \frac{1}{2} h^2)$, ed $\frac{1}{2} h^2 \operatorname{tang} a = \operatorname{tang} a - \operatorname{tang} (a - e) = \ldots$ $\frac{\operatorname{sen} e}{\cos a \cos (a - e)}$ (620) $= \frac{e}{\cos^2 a}$ per essere e piccolissima: perciò $e = \frac{h^2 \operatorname{sen} a \cos a}{2r''} = \frac{h^2 \operatorname{sen} 2a}{4r''}$.

727. Ecco

727. Ecco ora alcuni Problemi per esercizio.

I. Cerco se la differenza che possono aver tra loro i due angoli obliqui d'un triangolo sferico rettangolo, abbia alcun limite *in più* e qual sia. *Ris.* Il limite è di $90°$.

II. Data in un triangolo sferico rettangolo la somma o la differenza dell'ipotenusa h e di un lato g, e dato l'angolo adjacente a, determinare h e g. *Ris.* $sen\,(h-g) = tang^2 \frac{1}{2} a\, sen\,(h+g)$ ovvero $sen\,(h+g) = cot^2 \frac{1}{2} a\, sen\,(h-g)$ e quindi h e g.

III. Dato un angolo a'' e i due lati g, g', trovar la somma o la differenza degli altri angoli a, a': e reciprocamente dato un lato g'' e i due angoli a, a', trovar la somma o la differenza degli altri lati g, g'. *Ris.* Partendo dal valor di $tang \frac{1}{2} a$ (686), si troveranno l'equazioni

$$tang \tfrac{1}{2}(a+a') = cot\, \tfrac{1}{2} a''\, cos\, \tfrac{1}{2}(g \backsim g') : cos\, \tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(a \backsim a') = cot\, \tfrac{1}{2} a''\, sen\, \tfrac{1}{2}(g \backsim g') : sen\, \tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(g+g') = tang \tfrac{1}{2} g''\, cos\, \tfrac{1}{2}(a \backsim a') \cdot cos\, \tfrac{1}{2}(a+a')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(g \backsim g') = tang \tfrac{1}{2} g''\, sen\, \tfrac{1}{2}(a \backsim a') : sen\, \tfrac{1}{2}(a+a')$$

IV. Dati o i tre angoli o i tre lati d'un triangolo, trovarne l'area s. *Ris.* 1°. $s = a + a' + a'' - 180°$, cioè *l'area eguaglia il prodotto del raggio* $r = 1$ *nell'arco differenza tra la somma dei tre angoli e* $180°$; 2°. $tang \frac{1}{2} s = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{(1 - cos^2 g - cos^2 g' - cos^2 g'' + 2 cos\, g\, cos\, g'\, cos\, g'')}}{1 + cos\, g + cos\, g' + cos\, g''} = \ldots\ldots$$

$$\frac{2\sqrt{sen\, q\, sen\,(q-g)\, sen\,(q-g')\, sen\,(q-g'')}}{1 + cos\, g + cos\, g' + cos\, g''}.$$

V. Applicar quest'ultime due formule ai casi 1°. di $g' = g'' = 90°$: 2°. di $a'' = 90°$: 3°. di $g = g' = g''$ e di $g = g' = g'' = 90°$; 4°. di g, g', g'' piccolissimi. *Ris.* 1°. $s = g$: 2°. $tang \frac{1}{2} s = tang \frac{1}{2} g\, tang \frac{1}{2} g'$: 3°. $tang \frac{1}{2} s = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{(1 - cos\, g)\sqrt{(1 + 2 cos\, g)}}{1 + 3 cos\, g}$, e in particolare $s = \frac{\pi}{2}$: 4°. $s = \sqrt{q(q-g)(q-g')(q-g'')}$.

VI. I poli di due circoli AD, AC son T, P, e condotti da essi per un punto dato S della superficie sferica gli archi PSE, TS, PTC, si trova $TC = l$, $SE = \delta$, $BD = z$. Si cer- 106.

106 ca il valor di $SB=a$. *Ris.* $sen\,a=$ . . . . $\frac{sen\,\delta\, sen\,l \pm \cos l \cos z \sqrt{(\cos^2\delta - \cos^2 l \cos^2 z)}}{1-\cos^2 l\, sen^2 z}$.

VII. E' ignota l' inclinazion di due circoli AC, AD o sia la distanza dei loro poli P, T: solo si sa che condotti da P, T per un dato punto S della superficie sferica gli archi PSE, TSB, PTD, si ha $EC=SPT=h$, $SB=a$, $BD=z$. Cercasi di determinar $TC=l$. *Ris.* $sen\,l=$ . . . . $\frac{\cos h \cos a\, sen\,2z \pm 2\tan\, a\sqrt{(sen^2 h - \cos^2 a\, sen^2 z)}}{2sen\,h \cos a\,(\cos^2 z + tang^2 a)}$.

VIII. Dai poli P, T di due dati circoli AC, AD la cui inclinazione è $CAD=i$, conduco per un dato punto S gli archi PSE, TSB. Supposto che sieno dati $AB=a$, $BS=\delta$, cerco $AE=L$ ed $ES=l$. *Ris.* $tang\,L=\frac{tang\,\delta\, sen\,i + sen\,a \cos i}{\cos a}$; $sen\,l=sen\,\delta \cos i - sen\,a\, sen\,i \cos\delta$.

105. IX. Dato un piccolo arco di parallelo DnB e data la sua distanza $BC=p$ dal polo C, trovar la differenza e dell' angolo nBC ($=90°$) dall'angolo mBC fatto dall' arco $DmB=m$ del cerchio massimo che passa per gli stessi punti D, B. *Ris.* $sen\,e=tang\,\frac{1}{2}m \cot p$ ovvero $e=\frac{1}{2}m \cot p$.

X. In un piccolissimo triangolo sferico di cui si hanno l' ipotenusa h e un lato g, si è trovato g' colle formule dei triangoli rettilinei. Cerco l' errore e commesso nel valutarlo. *Ris.* Chiamando al solito r'' il raggio della sfera dato in secondi (522), si ha $e=\frac{g^2\sqrt{(h^2-g^2)}}{6r''r''}$.

XI. Siasi ora nello stesso modo e nello stesso triangolo trovato il valor di h per mezzo de' due lati g, γ. Cerco l' errore e da correggersi. *Ris.* $e=-\frac{g^2\gamma^2}{6r''r''\sqrt{(g^2+\gamma^2)}}$.

106. XII. Nel triangolo sferico SPT in cui sieno dati i due angoli $P=h$, $T=180°-z$ e i due lati $PT=90°-l$, $TS=90°-a$, suppongo che l' arco PS passi in Pr scorrendo l' arco $Sr=da=q$. Cerco 1°. la differenza dh ovvero l' angolo SPr; 2°. la differenza $d\delta$ cioè PS — Pr. *Ris.* Fatto . . $\frac{q}{\cos a}=p$, avremo 1°. $dh=-\frac{p \cos l\, sen\,h}{\cos\delta}$, 2°. $d\delta=p\, sen\,l \times \cos\delta - p \cos l \cos h\, sen\,\delta$.

TRATTATO ANALITICO
DELLE SEZIONI CONICHE

Nozioni preliminari sull' uso dell' Algebra nella descrizion delle Curve.

728. L' Algebra applicata alla Geometrìa ricerca a fondo la Teorìa delle Curve, il cui scopo è di esprimer con equazioni la legge onde una curva fu descritta, e reciprocamente di descriver le curve onde si ha l'equazione, e di rilevarne le proprietà. Per far questo, ogni punto della curva si riferisce a due rette; l'una chiamata *Linea* o *Asse dell' ascisse*, l'altra *Linea* o *Asse dell' ordinate*: si cerca poi tra l'ascisse e l'ordinate un rapporto, la cui espressione analitica dà l'equazion della curva. Così $yy = 2ax - xx$ esprimendo il rapporto d' eguaglianza tra il quadrato di ciascuna ordinata e il rettangolo dell' ascisse, appartiene al circolo (478).

729. Si chiama *funzione di una quantità* l' espressione algebrica in cui entra questa quantità. Così l' equazione al circolo esprime l' egualità di una funzione (y^2) di ciascuna ordinata con una funzione ($2ax - x^2$) di ciascuna ascissa corrispondente. Chiamansi poi *coordinate* l' ascisse e l' ordinate corrispondenti d' una curva; e poichè la lunghezza loro varia a ogni punto, si chiaman *variabili* o *indeterminate* per opposizione alle quantità *costanti* o *determinate*. Infine il punto da cui cominciano a contarsi l' ascisse, si chiama *l' origine dell' ascisse* che può supporsi ove piace, ma determinata una volta, resta la stessa per tutto il calcolo. D' ordinario si pone l' origine o al vertice o al centro della curva: e poichè l' ascisse posson prendersi da parti opposte, si segnan l' une col segno + e le altre col —. La scelta della parte positiva è arbitraria; ma stabilita una volta, dee starsi a quella (108). Lo stesso è dell' ordinate, che distinguonsi in *positive* e *negative* secondo che son da una parte o dall' altra dell' asse: e normali o oblique

sopra di esso, per lo più son parallele tra loro; pur qualche volta partono da un punto fisso.

730. Come ogni punto d' una curva si riferisce a due rette, così (per dirlo di passaggio) ogni punto d' una *superficie curva* D'PG si riferisce a tre, quantunque non ogni superficie riferita a tre rette sia curva. Conduco infatti da un punto H di D'PG la normale HF sopra un dato piano DTD', e da F nel piano stesso la normale FM sull' asse DD'; è chiaro che fatta $OM = x$, $MF = y$, $FH = z$, converrà determinare x, y, z per avere il punto H: e supposte D'Y normale a DD', e D'Z normale in D' al piano DD'Y della Tavola, dicesi DD'Y il *piano delle* x, y, DD'Z il *piano delle* x, z, ed YD'Z il *piano delle* y, z. E' poi facile di aver l'equazion generale delle *superficie curve di rivoluzione* intorno ad un asse DD' (546): poichè congiunta HM, e prolungata MF in P onde $MP = u = MH$ per la natura della rivoluzione (546), il triangolo MFH rettangolo in F dà $u^2 = y^2 + z^2$, equazione cercata se vi si sostituisca il valor dell'ordinata u dato dall' equazion della curva genitrice D'PT. Così se D'PTO sia un rettangolo, sarà costante $MP = u = a$, e quindi $a^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del cilindro retto: se D'PTO sia un triangolo rettangolo, si avrà

$$D'O\ (b) : OT\ (a) :: D'M\ (b - x) : MP = u = \frac{a(b-x)}{b}$$ e

quindi $\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del

cono retto, che, prese le x da D', diviene $\frac{a^2 x^2}{b^2} = y^2 + z^2$:

se D'PTO sia un quadrante di circolo del raggio r, verrà $MP = u = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, e quindi $r^2 - x^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie sferica, che, prese le x da D', diviene $2rx - x^2 = y^2 + z^2$ ec. D' onde facilmente si vede che l'equazione del primo grado $Ax + By + Cz + D = 0$ esprime una superficie piana, giacchè quelle delle più semplici superficie curve son del secondo. Torniamo alle linee curve.

731. La curva dell'equazione $y^2 = 2ax - xx$ è la circonferenza di un circolo il cui diametro è $2a$; ma quando non si sappia, la costruzion di quest' equazione lo farà conoscere. Sia a una quantità costante che suppongo $= 5$, e condotta una retta indefinita BD sulla quale prendo $AD = 10 = 2a$, la divido in dieci parti eguali AP, PP, ec. Sia A l' origine dell' ascisse, BD il loro asse, AD la parte delle positive, AB sarà quella delle negative se la curva cercata

106.

107.

FIG. 107.

ne abbia. Dipoi conducasi al punto A la perpendicolare indefinita EF che prendo per asse delle ordinate, e di cui suppongo positiva la parte AE. Sia finalmente $AP = x$, $PM = y$. E' chiaro per l'equazione medesima $y = \pm\sqrt{(2ax - xx)}$, che quando $x = 0$, si ha $y = 0$; dunque la curva ha il punto A comune colla linea dell' ascisse. Se $x = 1$, $y = \pm 3$; se $x = 2$, $y = \pm 4$, e i valori corrispondenti di x e di y sono

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$y = 0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3,\ 0.$

I valori di y determinan la lunghezza d' altrettante ordinate le cui estremità M son tanti punti della curva cercata; e poichè questi valori son positivi e negativi, conducendo dal punto A due *rami* eguali, l'uno che passi per i punti M al di sopra dell' asse dell' ascisse, e l'altro per i punti corrispondenti al di sotto, si avrà la curva richiesta che sarà tanto più esatta quanto più si moltiplicheranno le divisioni della linea AD. Così può descriversi una curva riferendo ciascun punto M a due linee BD, EF date di posizione: poichè terminato il *parallelogrammo* APMN *delle coordinate*, l'intersezione di NM, PM darà il punto M della curva. Nel nostro caso, crescendo i valori y fino a un certo termine che è 5, e decrescendo in seguito colla proporzione medesima fino a zero, si dee concludere 1°. che vi è un' ordinata PM maggiore di tutte l'altre o *Massima*: 2°. che la curva dell' equazione $y^2 = 2ax - xx$ è *rientrante* e *chiusa*. Non si stende di là dal punto A, poichè allora le sue ascisse essendo negative, i valori di y sarebbero *immaginarj*. Cerchiamone qualche proprietà.

732. Dal mezzo C della linea AD conduco delle rette CM e ho tanti triangoli rettangoli CPM, in cui $CM^2 = PM^2 + CP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; onde essendo $y^2 = 2ax - x^2$, si avrà sempre $CM = a$, cioè tutti i punti M sono ad egual distanza del centro C (395). Inoltre l'equazione $y^2 = 2ax - x^2$ dà $x : y :: y : 2a - x$, ovvero $\div$ AP : PM : PD; dunque ogni perpendicolare PM è media proporzionale tra i due segmenti AP, PD (477). Di più condotta una corda AM, si avrà $AM^2 = 2ax$, onde $x : AM :: AM : 2a$, cioè nella curva trovata tutte le corde condotte dal punto A ad uno dei punti M son medie proporziònali tra AD e il segmento corrispondente AP (473). Condotta pure MD, si avrà $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, proprietà del triangolo rettangolo; dunque tutti gli angoli AMD son retti (419). Iscrivendo il quadrilatero AMDM', si troverà pure che $AM \times M'D + AM' \times MD = AD \times MM'$ (484); ec.

733. Si debba ora descriver la curva dell'equazione $y^2 = ax$. Già si vede che questa dee tagliar la linea dell'ascisse nella loro origine, poichè fatta $x=0$, si ha anche $y = \pm \sqrt{ax} = 0$, e di più che dee aver due rami eguali, uno positivo e l'altro negativo. Questi rami vanno all'infinito, allontanandosi dall'asse a misura che x ha valori più grandi: ma le x debbono esser positive, altrimenti le y divengono immaginarie; onde la curva avrà la forma MAM'. 108.

734. Sia pure $y^2 = x^2 - a^2$: facendo $y=0$, si ha $x = \pm a$, onde preso sull'indefinita BD un punto A per origine dell'ascisse, e due parti AS, As eguali ad a, la curva dee passar per i punti S, s che si chiamano i suoi *vertici*. Per conoscer la direzion de' suoi rami, sia AD il lato dell'ascisse positive, e si avrà $y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$ il che dà due rami, l'uno SM, l'altro SM', che anderanno ambedue all'infinito finchè $x > a$; essendo minore, y sarebbe immaginaria; onde se l'ascisse sien positive, la curva non oltrepasserà S. Prendendole negative, l'equazione resta la stessa, onde la curva alla distanza già trovata $As = a = -x$ ha due nuovi rami opposti ma eguali ai due primi. L'asse dell'ascisse è BD, quello dell'ordinate è EF, e dando dei valori ad x, si determineranno l'y o le PM, e i parallelogrammi delle coordinate daranno i punti M, m ec. per cui passa la curva. 109.

735. Cerchiamo la curva dell'equazione $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$. 110.

Si ha dunque $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{a - x}}$ se x è positiva, ed $y = \mp x \sqrt{\frac{b - x}{a + x}}$ se è negativa: onde x positiva non può eccedere a, e negativa non può ecceder b; senza ciò y sarebbe immaginaria. Prendo BD per linea dell'ascisse, AD $= a$ per la direzione delle positive, AB $= b$ per quella delle negative, il punto A per la loro origine, EF per l'asse dell'ordinate, e ho 1°. $y=0$ quando $x=0$, onde la curva passa per il punto A; 2°. ad ogni valor di x ne trovo due per y, onde vi sono ordinate positive e negative: 3°. i due valori PM, PM' di y crescon sempre finchè presa $x = a$, divengono infiniti, poichè allora $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{0}} = \infty$ (197);

cioè bisogna prolungare all'infinito HG perchè incontri i due rami della curva (si chiamano *asintoti* le linee, che sempre più accostandosi ai rami della curva, non possoa

però mai incontrarli); 4°. se x è negativa, y ha due valori finchè $x < b$ e la curva ha due rami anche in senso negativo; 5°. $x = b$ dà $y = 0$; onde la curva passa per B, ma non può scender più basso; 6°. se $y = 0$, si ha $x^2 \times \left(\frac{b-x}{a+x}\right) = 0$, onde $x^2(b-x) = 0$, che dà $x = 0$, $x = 0$, $x = b$, e però la curva passerà una volta per il punto B, e due volte per A ove formerà un *nodo* (quando due, tre o più rami della curva passano per lo stesso punto, questo si chiama *punto doppio*, *triplo*, *multiplo*, e l' Algebra insegna a discerner questi punti e a conoscerne la moltiplicità); 7°. se $b = 0$, il nodo svanisce, e l' equazione diviene $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ che appartiene a una curva detta *Cissoide*.

110.

736. Oltre i punti multipli vi sono ancora dei punti d' *inflessione*: in quei di *flesso contrario* la curva dopo essere stata convessa in un senso, comincia ad esserlo nel senso opposto, come MAM: ma in quelli di *regresso* un ramo della curva tocca l'altro e torna indietro, come mAm': in ambedue la tangente è anche secante nel punto A d' inflessione, e la curva è parte di quà e parte di là dalla tangente.

111.

112.

737. Se l' equazione delle coordinate è del primo grado, ella appartiene sempre a una linea retta, e però le rette si chiaman *linee del primo genere* o del *primo ordine*: se è del secondo grado, del terzo ec., le linee si chiaman del *secondo*, del *terzo genere* ec.; e le linee del secondo si chiamano anche *curve del primo genere*, quelle del terzo *curve del secondo* ec. La sola retta è del primo genere; ve ne son quattro del secondo; settantadue del terzo; quelle del quarto sono in più gran numero ec.

738. In questa division di linee in varj ordini, si comprendono le sole curve *geometriche*, cioè quelle che hanno delle rette per ascisse e per ordinate, la cui ragione può determinarsi geometricamente. Una curva che avesse per coordinate delle quantità trascendenti (10), non sarebbe geometrica, ma *meccanica* o *trascendente*. Le geometriche si chiamano anche *curve algebriche*.

739. Ora il principale oggetto dell' Analisi nell' esame d'una curva è 1°. di trovarne l' equazione quando la curva è data, o di descriverla quando se ne ha l' equazione: 2°. di determinarne la tangente: 3°: di conoscerne la *curvatura* in un punto dato: 4°. di cercarne le massime o mi-

nime ordinate; 5°. di trovarne la quadratura o esatta se è possibile o approssimata; 6°. di trovarne la rettificazione cioè determinar la lunghezza d'una retta eguale ad un suo arco qualunque ec.

Origine ed Equazione delle Sezioni Coniche.

113. 740. Tagliato un cono BCD con un piano AMP, si cerca l'equazion della curva MAm che nasce da questa Sezione. Un piano BCD perpendicolare alla base CD e al piano segante AMP, dà per l'intersezione di questi due piani una retta Aa; ed un piano FMG parallelo alla base, dà un circolo la cui intersezione col piano AMP è una retta PM normale alle rette Aa, FG (536); onde PM è un' ordinata comune al circolo e alla sezione MAm. Sia dunque AP $= x$, PM $= y$, AB $= c$, l'angolo ABa $=$ B, l'angolo BAa $=$ A: la proprietà del circolo dà $y^2 = \text{FP} \times \text{PG}$, e per trovare FP e PG, conduco AE parallela a CD e PK parallela a BD, l'una e l'altra nel piano BCD: dunque AB : sen AEB :: AE : sen B (636), ed AE $= \frac{c\, sen\, \text{B}}{sen\, \text{D}}$. Inoltre il triangolo APK dà sen AKP ($= sen$ AEB): sen APK ($= sen$ AaE $= sen$ (A + B) (425)) :: x : AK $= \frac{x\, sen\, (\text{A} + \text{B})}{sen\, \text{D}}$; dunque PG $=$ KE $=$ AE $-$ AK $= \frac{c\, sen\, \text{B} - x\, sen\, (\text{A} + \text{B})}{sen\, \text{D}}$. Parimente nel triangolo APF si ha sen AFP ($= sen$ BFG (613)) : x :: sen A : FP $= \frac{x\, sen\, \text{A}}{sen\, \text{C}}$; onde $y^2 = \frac{sen\, \text{A}}{sen\, \text{C}\, sen\, \text{D}}$ ($cx\, sen\, \text{B} - x^2\, sen\, (\text{A} + \text{B})$), equazione cercata.

741. Dunque 1°. ad ogni ascissa x corrispondono due ordinate y eguali ed opposte; onde l'asse divide in mezzo la sezione: 2°. se $c = 0$, cioè se il piano segante passa per il vertice B del cono, l'equazione diventa $y^2 = \ldots\ldots$ $\frac{sen\, \text{A}\, sen\, (\text{A} + \text{B})\, x^2}{sen\, \text{C}\, sen\, \text{D}} = \frac{b^2 x^2}{m^2}$, fatto $\frac{b^2}{m^2}$ il coefficiente di x^2; perciò $y = \pm \frac{bx}{m}$, equazione alla linea retta (490), che dà

per

per sezione un triangolo, come già si sapeva (546): 3°. se $A + B < 180°$ ed insieme $A = C$ o $A = D$ viene (613) 112.

$y^2 = \frac{cx \, sen\, B}{sen\, D} - x^2$ o $y^2 = \frac{cx \, sen\, B}{sen\, C} - x^2$, equazioni alla curva circolare (478) che danno un circolo per sezione, come pur si sapeva (546). Ma oltre il triangolo ed il circolo, posson farsi nel Cono tre altre Sezioni, dette propriamente *Coniche* e che dal Cono trasporteremo in un piano.

742. Nella trovata equazion generale sia primieramente $A + B < 180°$; allora il piano AMP convergendo col lato BD (413), lo incontra, e la Sezione *rientrante* o chiusa si chiama *Ellisse*. Fatto $y = 0$, si ha $cx \, sen\, B - x^2 \, sen(A + B) = 0$, cioè $x = 0$ ed $x = \frac{c \, sen\, B}{sen(A + B)}$, due punti o vertici ove la curva taglia la linea dell'ascisse (731): la lor nota distanza $Aa = 2a$ si chiama *asse primo*, *maggiore* o *trasverso*; e poichè $c = \frac{2a \, sen(A + B)}{sen\, B}$, l'equazione diventa 113.

$y^2 = \frac{sen\, A \, sen(A + B)}{sen\, C \, sen\, D}(2ax - x^2)$. Se quì si faccia $x = a$, viene $y^2 = \frac{sen\, A \, sen(A + B) \, a^2}{sen\, C \, sen\, D}$, ordinata nota che passa per il mezzo C dell'asse trasverso o per il *centro* dell'ellisse; la chiamo b ed il suo doppio $Bb = 2b$ è l'*asse secondo*, *minore* o *conjugato*; e poichè $\frac{sen\, A \, sen(A + B)}{sen\, C \, sen\, D} = \frac{b^2}{a^2}$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Or preso $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$, terza proporzionale dopo il primo asse ed il secondo, e detta comunemente *parametro dell'asse trasverso*, si ha $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ *equazione al parametro dell'asse trasverso*.

743. Secondariamente nell'equazion generale sia $A + B = 180°$; allora il piano AMp è paralello al lato BD (413), e la Sezione *infinita* si chiama *Parabola*; e poichè $sen(A + B) = 0$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{sen\, A \, sen\, B \, cx}{sen\, C \, sen\, D}$, ove fat- 114.

to $\frac{c\,sen\,A\,sen\,B}{sen\,C\,sen\,D} = p$, *parametro* della curva, si ha $y^2 = px$.

D'onde è chiaro che la parabola è un' ellisse con l' asse trasverso infinito; poichè preso $2a = \infty$, l' equazione al parametro dell' ellisse (197) diventa $y^2 = px$.

744. Finalmente nell' equazion generale sia $A + B > 180°$; allora il piano AMP divergendo dal lato BD (413), lo incontra solo nel suo prolungamento oltre il vertice B, e la sezione *infinita*, inferiore o superiore, si chiama *Iperbola*, ambedue *Iperbole opposte*; essendo poi *sen* (A + B) negativo (612), la lor comune equazione è $y^2 = \ldots \frac{sen\,A}{sen\,C\,sen\,D}(cx\,sen\,B + x^2\,sen\,(A+B))$. Se sopra questa si operi come sull' equazione all' ellisse (742), si troverà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, ed $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$. (115.)

745. Dunque l' equazione $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax \mp x^2)$ è generale per tutte le Curve Coniche: col segno — dà l' ellisse ed anche il circolo, se $2a = p$; col + dà l' iperbola ed anche l' equilatera, se parimente $2a = p$: e se $2a = \infty$, dà la parabola.

746. Volendo pertanto nella Sezione una doppia ordinata eguale al parametro, verrà $2y = p = 2\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax \mp x^2)}$, cioè per la parabola, fatta $2a = \infty$, si ha $x = \frac{p}{4}$, e per l' ellisse ed iperbola, posto il valor di $p = \frac{2b^2}{a}$, si ha $x = \pm a \pm \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$. Presa dunque dal vertice A dell' asse parabolico l' ascissa $x = AF = \frac{p}{4}$; applicata dall' estremità B del conjugato al trasverso dell' ellisse la $BF = Bf = AC = a$, onde $CF = Cf = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ed $x = AF = AC - CF = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ovvero $x = Af = AC + Cf = a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$; tagliata infine dal centro C dell' iperbola sull' asse trasverso prolungato la $CF = Cf = BA = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, onde $x = AF = FC - CA = \sqrt{(a^2 + b^2)} - a$ ovvero $- x = Af = AC + Cf = a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$: sarà nelle tre sezioni l'ordinata $Dd = D'd' = p$. I punti F, f diconsi *Fuochi*: uno ne ha la parabola, ma due l' ellisse e l' iperbola, dei quali il semi-intervallo (116. 118. 121.)

CF si chiama *eccentricità*; la faremo c, e si avrà $CF = \sqrt{(a^2 \mp b^2)} = c$.

747. E' quì da notarsi 1°. che moltiplicando tra loro i due trovati valori di x nell' ellisse e nell' iperbola, si trova $(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})(a + \sqrt{(a^2 - b^2)}) = (\sqrt{(a^2 + b^2)} + a)(\sqrt{(a^2 + b^2)} - a) = b^2$, cioè *il semiasse minore è medio proporzionale tra le distanze dell' un de' due fuochi ai due vertici*: 2°. che presa dai fuochi F, f la $FI = fi = \frac{p}{4} = \frac{b^2}{2a}$, viene $\div AI \left(a - c \mp \frac{b^2}{2a}\right) : AF(\pm a \mp c) : Aa\,(2a)$, ed anche $\div Ai \left(a + c \mp \frac{b^2}{2a}\right) : Af\,(a + c) : Aa\,(2a)$. Basti questo piccol saggio d' analogìa tra le tre curve: per maggior chiarezza daremo separatamente il seguito delle lor proprietà.

118. e 121.

Parabola.

748. L' equazione alla parabola è $y^2 = px$: onde *i quadrati dell' ordinate son fra loro come le loro ascisse*. Con questa equazione si determina p; poichè presa un' ascissa $a = x$ ed un' ordinata $b = y$, la terza-proporzionale dopo a, b sarà il parametro (490).

749. Condotta dalla curva al fuoco F la retta o *raggio vettore* MF, sarà $FM = z = \sqrt{[y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = AQ + AG$: prolungata dunque LA, se si prenda $AG = AF = \frac{1}{4}p$, e per G si conduca l'indefinita o *direttrice* EGe parallela all' ordinata MQ, sarà la normale $MH = QG = FM$; dunque *la distanza d' un punto qualunque* M *della parabola dalla direttrice, è eguale al raggio vettore* MF.

116.

750. Cerco ora MT tangente al punto dato M. Immagino l' arco Mm infinitesimo il cui prolungamento MmT è la tangente stessa, e condotte sulla direttrice le normali MQ, mq, le rette MF, mF al fuoco F, ed mg parallela a Qq, descrivo col centro F, e raggio Fm l' arco infinitesimo mr che può prendersi per un seno; sarà $MQ = MF$, $mq = mF$, ed $MQ - mq\,(= Mg) = MF - mF\,(= Mr)$. Dunque i triangoli rettangoli Mmg, Mmr eguali e simili (441) hanno l' angolo mMr

117.

117. o $TMF = gMm = MTF$; dunque il triangolo MTF è isoscele, e però presa $FT = FM$, la linea MT condotta per T, M sarà tangente in M. D'onde segue che se MO sia parallela all'asse AN, si avrà l'angolo $MTF = LMO = FMT$.

751. Poichè $z = FT = FM = x + \frac{1}{4}p$ (749), si ha $FT - \frac{1}{4}p = x = AT$; dunque *la suttangente* $PT = 2x$ *è doppia dell'ascissa*. La *tangente* $MT = \sqrt{(px + 4xx)} = 2\sqrt{xz}$; e condotta MN normale alla parabola o alla sua tangente in M, si avrà la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$, e la *normale* $MN = n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{pz}$. Se dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano ai raggi vettori FM, OM le perpendicolari NB, NB', i triangoli NBM, NB'M eguali (750) daranno $BM = MB' = PN = \frac{1}{2}p$: e se dal punto F si conduca sulla tangente TM la perpendicolare $FC = q$, sarà $MT : TC :: MN : CF$, e poichè $TC = \frac{1}{2}MT$ (431), sarà $CF = q = \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\sqrt{pz}$, e perciò $2qn = n^2 = pz$ ed $n = \frac{pz}{2q}$.

E se sia l'angolo $TFM = \beta = 180^\circ - 2MTP = 2\varphi$, sarà $TP^2 (4x^2) : MP^2 (px) :: 1 : tang^2 MTP$ ($= tang^2 \frac{1}{2} MFP = tang^2 \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = cot^2 \varphi$ (617)), onde $x = \frac{1}{4}p\, tang^2 \varphi$ (610.6[1].), ed $x + \frac{1}{4}p (= FM = z) = \frac{1}{4}p(1 + tang^2 \varphi) = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2 \varphi} = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2 \frac{1}{2}\beta}$. Perciò se collo stesso asse e fuoco si descriva un'altra parabola A'M' del parametro p', sarà $FM : FM' :: p : p' :: FA : FA' :: x : x'$.

116. 752. La parallela MO all'asse si chiama *diametro*; il punto M ne è l'*origine*; le sue ordinate son le rette NP parallele alla tangente in M, e le ascisse di queste ordinate son le rette MP. Per trovar l'equazione alle coordinate

del diametro MO, chiamate MP (x), PN (y), AQ $=$ AT $=$ a, avremo MQ $=\sqrt{ap}$ e fatto $p+4a=p'$ sarà MT $=$ PR $=$ $\sqrt{ap'}$ (751). Condotta ora NL normale all' asse, i triangoli simili NRL, MTQ daranno $\sqrt{ap'}:y+\sqrt{ap'}::\sqrt{ap}:$ NL $=$ $y\sqrt{\frac{p}{p'}}+\sqrt{ap}::2a:$ RL $=2y\sqrt{\frac{a}{p'}}+2a$. Ora AR $=$ RT $-$ AT $=x-a$; dunque AL $=x+a+2y\sqrt{\frac{a}{p'}}$, e per la proprietà della parabola, NL$^2=p\times$AL cioè $(\sqrt{ap}+y\sqrt{\frac{p}{p'}})^2=ap+px+2py\sqrt{\frac{a}{p'}}$; e riducendo, $yy=p'x$, equazione simile alla trovata per l' asse; perciò qualunque diametro MO divide in mezzo l' ordinate Nn, e il suo parametro $p'=p+4a$ è quadruplo della distanza dell' origine M dal fuoco F. Con questi principj si risolvono i problemi seguenti.

753. I. Dato l' asse AL e il parametro p, trovare un diametro MO che faccia colle sue ordinate un angolo dato MP$n=a$. Il problema si riduce a trovare il punto Q ove l' ordinata normale MQ incontra l' asse. Sia AQ $=x$; il triangolo MTQ dà $tang\, a=\frac{\sqrt{px}}{2x}$ (646), $x=\frac{p}{4}cot^2 a$ (610.6ª.) e $p'(=p+4x)=\frac{p}{sen^2 a}$ (610).

II. Dato il parametro p' e l' origine M del diametro MO con l' angolo a delle coordinate, trovar l' asse AL, il vertice della curva A, ed il suo parametro p. Serbando le denominazioni del problema precedente, abbiamo MQ $=$ $\sqrt{px}$, $p'=\frac{p}{sen^2 a}=p+4x$, onde $p=p'sen^2 a$, $x=\frac{p'}{4}cos^2 a$ (610.9ª.), MQ $=\pm\frac{p'}{4}sen\, a\cos a=\pm\frac{p'}{4}sen\, 2a$(621).

Ellisse.

754. L' equazione all' ellisse essendo $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-xx)$, si avrà $y^2:2ax-x^2::b^2:a^2$, cioè PM^2: AP$\times$Pa:: CB^2: CA^2, *e il quadrato dell' ordinata è al prodotto dell' ascisse, come il quadrato dell' asse minore al quadrato del maggiore.* Descritto dunque col centro C e raggio CA un circolo, sarà 118.

118. $PN = AP \times Pa$, $PN:PM::a:b::CB':CB$: onde l'ordinate dell' ellisse son proporzionali all' ordinate del circolo: perciò per descrivere un' ellisse basta far passare una curva per una serie di punti presi sull' ordinate d' un circolo divise in parti simili.

755. Se nell' equazione si ponga $a - x = CP$ in luogo di $x = AP$, ella diverrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, ove l'ascisse son prese non più dal vertice A, ma dal centro C: questa, come più semplice, è più in uso; e da questa (se sopra Bb si cali l' ordinata $MQ = PC = x$) si ha $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, equazione al second' asse, il cui parametro, terzo proporzionale dopo $2b$ e $2a$, sarà $p' = \frac{2a^2}{b} = \frac{2a}{p}\sqrt{2ap}$. E' chiaro che se $a = b$, l' equazione all' ellisse diventa quella del circolo; onde il circolo è un' ellisse *equilatera* o di assi eguali.

756. Prese dunque l' ascisse dal centro, si avrà il raggio vettore $FM = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + (c - x)^2)} = \sqrt{(a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2})}$ (746) $= a - \frac{cx}{a}$, e l' altro raggio vettore $fM = a + \frac{cx}{a}$. Onde 1° $fM + FM = 2a$, cioè *la somma dei due raggi vettori eguaglia l' asse trasverso*: 2°. se sia l' angolo $PfM = \beta$, sarà $fP (= c + x) = fM . \cos\beta$ (645), e perciò $x = fM . \cos\beta - c$, ed $fM \left(= a + \frac{cx}{a}\right) = \ldots \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - c\cos\beta}$; come pure $FM = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\beta'} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - c\cos\beta'}$, posto $PFM = \beta'$: 3°. volendo i raggi vettori con l' ascisse prese dal vertice, si cangierà x in $a - x$, e verrà $FM = a - c + \frac{cx}{a}$, $fM = a + c - \frac{cx}{a}$: 4°. e volendo introdurre il raggio vettore nell' equazione all' ellisse, si farà $FM \left(= a - \frac{cx}{a}\right) = z$ ovvero $fM \left(= a + \frac{cx}{a}\right) = 2a - z$, onde $x = \frac{a(a - z)}{c}$ ed $y^2 = \frac{b^2}{c^2}((2a - z)z - b^2)$.

FIG. 119.

757. Debbasi ora condurre dal dato punto M la tangente MT. Prolungato fM in L immagino l'arco infinitesimo Mm, e dai fuochi F, f conduco i raggi vettori fm, Fm: descritti coi centri f, F, e coi raggi fm, FM i piccoli archi mr, Mg, avrò $fm + mF = FM + Mf$, ovvero $fM - fm = Mr = Fm - FM = mg$: dunque (441) i triangoli rettangoli mMg, mMr sono eguali e simili, e perciò l'angolo $gmM = FMT$, perchè $FMT = gmM + MFm$ $(= \frac{1}{\infty} = 0)$; dunque $FMT = mMr = LMT$, cioè la retta MT che dividerà in mezzo l'angolo LMF, sarà la tangente cercata. D'onde segue che l'angolo $LMT = QMf = FMT$.

758. Se da M si alzi sulla tangente la normale MN, sarà l'angolo $fMN = NMF$, ed $fM : MF :: fN : NF$, ovvero $fM + FM\ (2a) : FM\ (a - \frac{cx}{a}) :: fN + FN\ (2c) : FN = c - \frac{c^2 x}{a^2} = c - x + \frac{b^2 x}{a^2}$ ed $fN = 2c - FN = c + \frac{c^2 x}{a^2} = c + x - \frac{b^2 x}{a^2}$; dunque poichè $fP = x + c$ ed $FP = x - c$, si avrà 1°. la *sunnormale* $PN = FN + FP = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{px}{2a}$: 2°. la *normale* $MN = n = \frac{1}{a^2} \sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)} = \frac{b}{a^2} \sqrt{(a^4 - c^2 x^2)} = \frac{b}{a} \sqrt{(2az - z^2)}$ (756): 3°. la *suttangente* $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \ldots \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$: 4°. la *tangente* $TM = \frac{y}{b^2 x} \sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)} = \ldots \frac{1}{ax} \sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - c^2 x^2)}$. Inoltre $TC = TP + PC = \frac{a^2}{x}$, altro modo di determinare il punto T della tangente in M; $Tf = \frac{a^2}{x} + c = \frac{a^2 + cx}{x} = \frac{a(2a - z)}{x}$ (756); $TN = TP + PN = \frac{a^2 n^2}{b^2 x}$; $TF = \frac{a^2}{x} - c = \frac{az}{x}$; $TA = \frac{a^2}{x} - a$; e nel vertice A la tangente $AV = \frac{PM.TA}{PT} = \frac{ay}{a + x} = b \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$.

759. Che se dai fuochi f, F e dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano sulla tangente e sui rag-

119. gi vettori le perpendicolari fQ ed FR, NB ed NB', come pure per il centro C la DCD' parallela alla tangente, sarà 1°. TN $\left(\frac{a^2n^2}{b^2x}\right)$: NM (n) : : TF $\left(\frac{az}{x}\right)$: FR $= q = \frac{b^2z}{an}$: : T$f\left(\frac{2a^2 - az}{x}\right)$: $fQ = \frac{b^2(2a-z)}{an} = \frac{an}{z}$ (758); d' onde si ha FR $\times$ FQ $= b^2$, e la nuova espression della normale $n = \frac{b^2z}{aq} = \frac{pz}{2q}$: 2°. M$f\left(a + \frac{cx}{a}\right)$: fP $(c + x)$: : fN $\left(c + \frac{c^2x}{a^2}\right)$: fB' $= \frac{c(c+x)}{a}$, onde fM $- f$B' $=$ MB' $= \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} =$ MB, atteso l' angolo fMN $=$ NMF: 3°. TF $\left(\frac{a^2}{x} + c\right)$: fM $\left(a + \frac{cx}{a}\right)$: : Cf (c) : fD $= \frac{cx}{a}$, e però DM $=$ Mf $- f$D $= a =$ D'M, attesi i triangoli simili TFM, CFD'.

118. 760. Se dal punto M si conducano all' asse conjugato la tangente Mt e la normale MO prolungata in n, i triangoli simili MPO, MQn, MQt e la sunnormale PO ($= \frac{b^2x}{a^2}$) daranno per il second' asse, sostituendo il valor di x^2 (755), 1°. la *sunnormale* Q$n = \frac{\text{PM} \cdot \text{MQ}}{\text{PO}} = \frac{a^2y}{b^2} = \frac{p'y}{2b}$ (746); 2°. la *normale* M$n = \frac{\text{OM} \cdot \text{MQ}}{\text{PO}} = \frac{a}{b^2}\sqrt{(b^4 + c^2y^2)}$; 3°. la *suttangente* Q$t = \frac{\text{QM}^2}{n\text{Q}} = \frac{b^2 - y^2}{y}$; onde C$t =$ CQ $+$ Q$t = \frac{b^2}{y}$ e perciò CQ : CB : : CB : Ct, come nell' asse trasverso.

120. 761. Una retta nCN che passando per il centro C termina ai due punti opposti della curva, dicesi *diametro*, e condotta DCd parallela alla tangente in N, i diametri DCd, nCN chiamansi *conjugati*; le rette MP parallele alla tangente son l' ordinate del diametro CN, le parti CP ne son l' ascisse, e il parametro di un diametro qualunque è una terza-proporzionale a questo e al suo conjugato.

762. Condotte dall' estremità D, N l' ordinate DI, NQ all' asse maggiore Aa, sia QN $= y$, CQ $= x$, ID $= u$, IC $= z =$

FIG.

$z=\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-u^2)}$ (755), e i triangoli simili DIC, NQT danno $NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2$, ovvero $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) : \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} :: u^2 : a^2-\frac{a^2u^2}{b^2}$ onde $u=\frac{bx}{a}$; così si troverebbe $y=\frac{bz}{a}$, onde $\frac{u}{x}=\frac{y}{z}$ e $zu=xy$, cioè i triangoli DIC, CNQ sono eguali in superficie. Dunque 1°. $u^2 = \ldots \frac{b^2x^2}{a^2}=b^2-y^2$ (755) ed $u^2+y^2=b^2$; 2°. $z^2=\frac{a^2y^2}{b^2}= a^2-x^2$ e $z^2+x^2=a^2$; 3°. $u^2+z^2+y^2+x^2$ ($=DC^2+CN^2$) $=a^2+b^2$, cioè nell' ellisse la somma dei quadrati di due diametri conjugati è sempre eguale alla somma dei quadrati de' due assi; 4°. condotta ND, la superficie del triangolo $NCD=\frac{(u+y)(z+x)}{2}-\frac{zu}{2}-\frac{xy}{2}=\frac{ux+yz}{2}= \ldots \frac{bx^2}{2a}+\frac{ay^2}{2b}=\frac{ab}{2}$; dunque il parallelogrammo $CDEN=ab$, e l' intero parallelogrammo $FEHG=4ab=2a\times 2b$, e però *tutti i parallelogrammi circoscritti all' ellisse sono eguali tra loro e al rettangolo dei due assi*.

763. Sia ora il semidiametro $CN=m$, $CD=n$, l'angolo $CPM=DCn=p$, e sarà 1°. $m^2+n^2=a^2+b^2$; 2°. $ab=mn\,sen\,p$ che è l' espressione della superficie del parallelogrammo CDNE (644). Ora queste due equazioni danno subito i diametri conjugati ed eguali dell'ellisse, poichè allora $2m^2= a^2+b^2$, ovvero $m=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; e $sen\,p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, onde poichè queste quantità son sempre reali, ogni ellisse ha due diametri conjugati eguali. La lor posizione dipende dal valor di x, ma $x^2+y^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2$ (755) $=m^2= \ldots \frac{a^2+b^2}{2}$; dunque $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, valore indipendente da b, onde l' ordinata NQ prolungata, determinerà i diametri conjugati eguali in tutte le ellissi che avranno comune l' asse Aa.

764. Cerchiamo ora l'equazione alle coordinate CP, PM, e sia $CP=x$, $PM=y$, $CQ=t$, $QN=r$, $NT=q$, e $TQ=$

120. $\frac{a^2-t^2}{t}$ (758) $=s$. Condotte PK, MO perpendicolari all' asse, e PL perpendicolare ad MO, i triangoli simili NQT, MLP danno $ML=\frac{ry}{q}$, $PL=\frac{sy}{q}$, e gli altri due CPK, CNQ danno $PK=\frac{rx}{m}$, $CK=\frac{tx}{m}$, onde $CO=\frac{tx}{m}-\frac{sy}{q}$ ed $MO=\frac{ry}{q}+\frac{rx}{m}$: ma per la proprietà dell' ellisse, $\frac{a^2}{b^2}.\ MO^2=a^2-CO^2$; dunque sostituendo, ordinando e riflettendo che $\frac{a^2r^2}{b^2}=a^2-t^2$ (762. 2°) $=ts$, si avrà $\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}\right)y^2+\ldots\left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2}+\frac{t^2}{m^2}\right)x^2=a^2$. Osservo ora che quando $x=0$, si ha $y=n$; dunque $\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}=\frac{a^2}{n^2}$, cioè non può in tal caso avverarsi l' equazione se il coefficiente di y^2 non sia $\frac{a^2}{n^2}$; al contrario quando $y=0$, si ha $x=m$, onde per la ragione stessa il coefficiente di x^2 è $\frac{a^2}{m^2}$; dunque avremo $\frac{a^2}{n^2}y^2+\frac{a^2}{m^2}x^2=a^2$, ovvero $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, equazione simile a quella degli assi. Dal che segue 1°. che ogni diametro NCn divide in mezzo l' ordinate MPm, e perciò l' ellisse intera: 2°. che ogni diametro Nn è diviso in mezzo nel centro C perchè ne' punti N, n si ha $x^2=m^2$, onde $x=\pm m$.

765. I. Dati i due semiassi a, b trovar due diametri conjugati che facciano fra loro un angolo dato $p=DCn$. Abbiamo $m^2+n^2=a^2+b^2$, ed $mn=\frac{ab}{sen\,p}$ (763); dunque $m^2+n^2\pm 2mn=a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p}$; ed $m\pm n=\sqrt{\left(a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p}\right)}$, d' onde sommando e sottraendo si ha m ed n. Per determinar la direzione di un de' diametri o l' angolo ACN che chiamo c, il triangolo CNT dà (414. 636) $sen(p-c)$:

$m :: sen\,p : CT = \frac{aa}{CQ}$ (758) $= \frac{m\,sen\,p}{sen\,(p-c)}$, onde $CQ = \ldots$ $\frac{a^2\,sen\,(p-c)}{m\,sen\,p}$; si ha dunque nel triangolo rettangolo CNQ (preso CN per raggio) (645) $m\,cos\,c = \frac{a^2\,sen\,(p-c)}{m\,sen\,p}$, che dà $m^2\,sen\,p\,cos\,c = a^2\,sen\,(p-c) =$ (614) $a^2\,sen\,p\,cos\,c - a^2\,sen\,c\,cos\,p$, ovvero $\frac{a^2 - m^2}{a^2}\,sen\,p\,cos\,c = sen\,c\,cos\,p$; e perciò (610.2ª.) $tang\,c = \frac{a^2 - m^2}{a^2}\,tang\,p$.

766. II. Dati i semidiametri conjugati m, n e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Dall'equazioni $mn\,sen\,p = ab$ ed $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ con un calcolo simile al precedente si determina a e b. L'angolo che dà la direzione degli assi si trova come prima.

Iperbola.

767. Nell'equazione all'iperbola (744) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ se x sia negativa, si ha $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - 2ax)}$, immaginaria finchè $x < 2a$; onde tra $x = 0$ ed $x = 2a$ non vi è curva: ma se $x > 2a$, l'ordinate saranno reali, e l'iperbola negativa eguale alla positiva. Infatti posta $aP' = x'$, sarà $x = 2a + x'$ ed $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' + x'^2)$ equazione per $M'am'$ simile a quella di MAm.

121

768. Da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ si ha $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, e *il quadrato dell'ordinata è al rettangolo dell'ascisse (prese fino ai due vertici A, a) come il quadrato del second' asse al quadrato del primo.* Se si ponga $x - a$ in luogo di $x = AP$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, ove $x = CP$, e l'ascisse son prese dal centro: di qui $x^2 =$

780. Sia ora aCA il primo asse dell' iperbola, e rappresenti BA la metà del secondo; condotte DE, TG, MPK perpendicolari a CA, ed ML e tK parallele alla stessa CA, i triangoli MTL, MtK, CDE saranno eguali e simili; fatta dunque $CP = u$, $PM = z$, $CE = tK = ML = r$, $MK = DE = TL = s$, e $CM = m$, $TM = n$, $CA = a$, $AB = b$, si avrà $TG(z+s) : CG(u+r) :: b : a$ e perciò $az + as = bu + br$: inoltre $TL\ (s) : LM\ (r) :: MP\ (z) : PS = \frac{rz}{s} = \frac{u^2 - a^2}{u}$ (771) $= \frac{a^2 z^2}{b^2 u}$ (768) onde $r = \frac{a^2 sz}{b^2 u}$; e sostituendo questo valore nell' equazione $az + as = bu + br$, si ha $(bu - as)(bu - az) = 0$; ma $bu - az = 0$ dà $a : b :: u : z$ il che è sempre assurdo fuorchè nell' infinito; dunque (178) $bu - as = 0$, $bu = as$, onde $az = br$, e quindi $a : b :: u : s :: r : z$, cioè $CP : DE :: CE : MP$.

FIG. 125.

781. Dunque 1°. i triangoli CED, CMP sono eguali in superficie: 2°. condotta DM, sarà DMC o $\frac{1}{2}$ CDTM = al trapezio $DMPE = \frac{1}{2}(s+z)(u-r) = \frac{1}{2}(su + uz - sr - rz)$, cioè (poichè $u : s :: r : z$, onde $uz - sr = 0$) $= \frac{1}{2}(su - rz)$; ed essendosi trovato $bu = as$, ed $az = br$, sarà $s = \frac{bu}{a}$, $r = \frac{az}{b}$, e perciò $su = \frac{bu^2}{a}$, $rz = \frac{az^2}{b}$, onde $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{b^2 u^2 - a^2 z^2}{2ab}$: ma l' equazion dell' iperbola dà $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$ e però $b^2 u^2 - a^2 z^2 = a^2 b^2$; dunque $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}$; dunque *il parallelogrammo* TT′ *formato dai diametri canjugati è eguale al rettangolo degli assi*: 3°. $DE^2 = s^2 = \frac{b^2 u^2}{a^2} = b^2 + z^2 = b^2 + PM^2$ (per l' equazione all' iperbola); dunque $DE^2 - PM^2 = b^2$: 4°. $CE^2 = r^2 = \frac{a^2 z^2}{b^2} = u^2 - a^2 = CP^2 - a^2$; dunque $CP^2 - CE^2 = a^2$; 5°. $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2$, e però *la differenza dei quadrati di due diametri conjugati è eguale alla dif-*

125. *ferenza de' quadrati dei due assi*: onde nell' iperbola equilatera, qualunque diametro eguaglia il suo conjugato.

782. I. Dati gli assi a, b d' un' iperbola, trovar due diametri conjugati che faccian tra loro il dato angolo $p =$ DCM. Abbiamo $mn\, sen\, p = ab$ ed $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, che danno m ed n; e per trovar la direzione di un de' diametri o l' angolo MCP che chiamo c, il triangolo CMP dà (644) $MP = m\, sen\, c$; dunque essendo (780) $b : a :: MP : CE$, sarà $CE = \frac{am\, sen\, c}{b}$; ma nel triangolo DCE (645) si ha $CE = n \cos(p+c)$; dunque $\frac{am}{bn} sen\, c = \cos p \cos c - sen\, p\, sen\, c$ (615), e perciò $\frac{sen\, c}{\cos c} = tang\, c = \frac{bn \cos p}{am + bn\, sen\, p}$: e poichè $a = \ldots$ $\frac{mn\, sen\, p}{b}$, sarà $tang\, c = \frac{b^2 \cot p}{m^2 + b^2}$.

II. Dati i semidiametri conjugati m, n d'un' iperbola e l' angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Ciò potrebbe aversi con le due equazioni e col raziocinio del passato problema: è però più semplice l' usare gli asintoti. Per l' estremità M del primo diametro CM condotta TMt che farà con MQ l' angolo $TMQ = p$, e presa $TM = Mt = n$, si condurranno CT, Ct: quindi diviso l' angolo TCt in mezzo con CA, si avrà la direzione del primo asse.

La rettificazione, la quadratura ed altre proprietà di queste e delle seguenti Curve, si troveranno nel Calcolo Integrale.

ALTRE CURVE.

Oltre le Sezioni Coniche, Curve di tanto uso in Geometria, ve ne sono più altre di cui è bene il far menzione.

131. 783. I°. La Concoide di Nicomede. Se per un punto B preso fuori di una retta GH, si conducano delle rette BQM, BAD ec. tali che le parti QM, AD ec. sieno eguali, la curva MDM' che passa per i punti M, D. ec. si chiama *Concoide*. Il punto B è il *polo*, la retta GH la *direttrice*, e prese sotto GH le parti eguali Qm, Ad ec., la curva mdm' è la concoide

FIG.

concoide *inferiore* o la parte inferiore d' una stessa concoide. Onde 1°. GH ne è l' asintoto; 2°. D*d* normale a GH ne misura la massima larghezza; 3°. se BA $> dA$, la curva è qual si vede alla fig. 131.; se BA $< dA$, ha un *nodo* B*ndn'*, e allora si chiama concoide *annodata*; se BA $= dA$, il nodo svanisce e resta un punto di regresso in B. 132. e 133.

784. Per saper se la concoide è curva algebrica, si conduca PM perpendicolare ad AP e sia AD $=$ QM $= a$, AB $= b$, AP $= x$, PM $= y$; si avrà PQ : PM :: AQ : AB, ovvero $\sqrt{(a^2-y^2)} : y :: x - \sqrt{(a^2-y^2)} : b$ onde $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, equazione alla concoide superiore: lo stesso calcolo dà $xy = (b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ per l' inferiore, e l' equazione è la stessa per l' annodata; e se si facesse $x =$ AR ed $y =$ RM, si verrebbe a cangiare x in y ed y in x, e l' equazione sarebbe $xy = (b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque la curva è algebrica del terz' ordine. Essa può descriversi con la continua intersezione d' una riga BCM mobile intorno a B, e d' un circolo descritto col raggio CM $= a$, che si farà muovere in modo che il centro C sia sempre in HG; basta allora che la riga passi costantemente per il centro del circolo. 131. 134.

785. Possono anzi formarsi infinite concoidi differenti sostituendo al circolo una curva qualunque CM e al centro di esso un punto fisso Q dell' asse di lei. Troviamone l' equazione. Condotte MP, AB perpendicolari alla direttrice, e fatta AP $= x$, PM $= y$, CP $= z$, CQ $= a$, AB $= b$, sarà PQ$(z-a)$: PM(y) :: AQ$(x+a-z)$: AB(b); onde $z = a + \frac{xy}{b+y}$, valore che sostituito nell' equazione della curva CM, dà quella della concoide MD. Per esempio, se la curva CM è un circolo il cui centro sia Q, si ha $y^2 = 2az - z^2$, che dà $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ come sopra: e se la curva CM è una parabola dell'equazione $y^2 = pz$, allora $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ è l' equazion della concoide parabolica, di cui fece uso Cartesio per risolvere un' equazion generale del sesto grado. 135.

786. II°. La Cissoide di Diocle. Sia il circolo AN*Bn* col diametro AB. Se condotta la tangente QB*q* al punto B e le rette AQ a varj punti di essa, si prenda QM $=$ AN, la curva MA*m* che passa per i punti M, *m* così determinati, si chiama *Cissoide*. 136.

787. Per trovarne l' equazione, conduco OM parallela ad AP, ed MP, NG perpendicolari; fatta AP $= x$, PM $= y$, e AB $= a$ diametro del circolo *genitore*, essendo AN $=$

136. MQ, sarà $AG = PB$, ed $AG\ (a-x) : GN\ (\sqrt{[ax - x^2]}) ::$ $AP\ (x) : PM\ (y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ onde $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, equazione cercata, da cui si vede 1°. che quando $x = 0$, anche $y = 0$, e però la curva passa per l' origine dell' ascisse; 2°. che se $x = \frac{1}{2}a$, si ha $y = \pm\frac{1}{2}a$, cioè i due rami della cissoide tagliano la circonferenza a distanze eguali da A e B; 3°. che se $x = a$, y è infinita, e che perciò BQ è l' asintoto della curva ec. (735).

137. 788. III°. La Logaritmica. Preso un punto A sull' indefinita HG e alzate dell' ordinate PM che abbian per logaritmi le loro ascisse AP, la curva BMm che passa per l' estremità di queste ordinate, dicesi *Logaritmica*. Sia $AP = x$, $PM = y$, $A =$ al modulo, $e = 2,7182818$ il cui logaritmo iperbolico è 1 (308); sarà $x = Aly = xle$, onde $y^A = e^x$, che dà $y = e^{\frac{x}{A}}$, equazion della logaritmica. Ella mostra 1°. che questa curva è trascendente (738): 2°. che l' ascisse x, x' della stessa ordinata y in diverse logaritmiche, o i logaritmi dello stesso numero in diversi sistemi, son come i moduli A, A'; 3°. che quando $x = 0$, si ha $y = 1 = AB$; 4°. che se $x = AE = AB = 1$, si ha $y = EF = e^{\frac{1}{A}}$, e però se in $y = e^{\frac{x}{A}}$, ad $e^{\frac{1}{A}}$ si costituisca $FF = a$, sarà sempre $y = a^x$: onde se l' ascisse forman la progressione aritmetica $\div 1, 2, 3, 4$, ec., l' ordinate formeranno la geometrica $\dot{\div}\ a^1, a^2, a^3, a^4$ ec., e però la logaritmica va all' infinito di là da AP. Ma prese verso AQ l' ascisse negative $x = -1, -2$ ec, l' ordinate diverranno $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$ ec., cioè la curva ha un ramo infinito BO di cui la direttrice o asse GH è l' asintoto.

138. 789. IV°. La Cicloide. Se un circolo AG giri sopra una retta Aa finchè il punto che toccava sul principio questa retta in A, la tocchi un' altra volta in a, questo punto descriverà una curva chiamata *Cicloide* o *Trocoide*. Ella è *ordinaria* quando il circolo *genitore* non ha altro moto che quello della sua rivoluzione: ma se ha di più un moto di traslazione o nel medesimo senso o in senso contrario, ella

139. è o *accorciata* o *allungata*. Nell' ordinaria la *base* Aa eguaglia la circonferenza del circolo genitore; è più corta

nell' accorciata, maggiore nell' allungata. Il diametro BC del circolo genitore si chiama *asse* della cicloide quando è normale al mezzo della sua base: il punto B è il suo *vertice*, e BC la sua altezza maggiore. 139. e 140.

790. Posto ciò, condotte MP normale a BC, e le corde eguali MF, OC, avremo FC = MO; dunque poichè FC = AC − AF = BIOC − FKM = BIOC − OLC = BIO, la parte MO dell' ordinata MP è sempre eguale all' arco corrispondente BIO del circolo genitore. Inoltre il resto OP è il seno del medesimo arco; dunque chiamando MP (y), BIO (u), si avrà per equazione alla cicloide ordinaria, $y = u + sen\, u$. Per generalizzarla si farà $MO = \frac{b}{a}$ BIO, il che conviene alla cicloide o ordinaria o accorciata o allungata, secondo che b è eguale o minore o maggiore di a, e si avrà $y = \frac{b}{a} u + sen\, u$. La cicloide è dunque una curva trascendente (738). 138.

791. Se il punto per descriver la cicloide si prenda dentro o fuori della circonferenza, la curva descritta sarà un' altra specie di cicloide; e se il circolo si faccia girare sulla circonferenza d'un altro circolo, la curva descritta da uno de' suoi punti, sarà un' *Epicicloide*.

792. V°. La Quadratrice di Dinostrato. Se la retta AG tangente al circolo in A si muova uniformemente e parallelamente a se stessa lungo il diametro Aa mentre il raggio AC gira uniformemente intorno al centro C verso il punto E, in modo che AG e AC si confondano con CE nel momento stesso; l' intersezione continua di queste due rette dà la curva AMD, chiamata *Quadratrice*, dalla cui descrizione segue che uno spazio qualunque AP percorso dalla retta AG sta all' arco circolare AB descritto nel tempo stesso dall' estremità del raggio, come un altro spazio AC percorso da quella retta, all' arco corrispondente ABE descritto dal raggio. Fatta dunque $AP = x$, $PM = y$, $AB = u$, $AC = r = 1$, $ABE = 90° = c$, si avrà 1° $x : u :: 1 : c$, onde $u = cx$; 2°. CP : PM :: CA : AG, ovvero $1 - x : y :: 1 : tang\, u$, onde $y = (1 - x)\, tang\, cx$, equazione alla quadratrice quando l' origine dell' ascisse è in A. 142.

793. Se sia in C, cangio x in $1 - x$, ed ho $u = c(1 - x)$ ed $y = x\, tang\, c(1 - x) = (618)\, x \cot cx = (628)\, \frac{1}{c} -$

142. $\frac{cx^2}{3} - \frac{c^3x^4}{3^2 \cdot 5}$ — ec.: onde quando $x = 0$, sarà $y = CD = \frac{1}{c}$, e però se si conoscesse la *base* CD della quadratrice, si avrebbe subito la quadratura del circolo; di quì è venuto il nome alla curva.

794. Se sia descritto col centro C e raggio CD il quadrante DLK, sarà (508) $\frac{1}{c}$: DLK :: 1 : c; dunque DLK = 1 = CA. Così PC = all'arco LD, perchè $\frac{1}{c}$: KL :: 1 : $c(1 - x)$; onde KL = $1 - x$ = AP, e PC = LD.

795. Prese le ascisse negative AP′, e sostituito il loro valore nella prima equazione, avremo $y = -(1 + x) \, tang \, cx$, che dà l'ordinate negative P′M′. Quindi la curva ha un ramo AM′, di cui la retta QN condotta alla distanza AQ = $r = 1$, è l'asintoto; poichè fatto $x = 1$, viene $y = -2\infty$.

Ben si vede 1°. che la retta AG e il raggio CA seguitando a muoversi dopo essersi confusi in CE, formano la parte Da della quadratrice: 2°. che se la curva fosse geometrica, si avrebbe qualunque angolo d'un dato numero di gradi, come di $\frac{90°}{m}$, bastando dividere AC in P onde AP : AC :: 1 : m, e condur l'ordinata PM e il raggio CB; l'angolo ACB sarebbe $= \frac{90°}{m}$, poichè $x : 1 :: u : c :: 1 : m$.

143. 796. VI°. La Spirale d'Archimede. Si chiama così la curva CKMA descritta da un punto C che si muove uniformemente lungo il raggio CA, mentre il raggio stesso si muove uniformemente intorno al centro C, in maniera che quando il raggio ha percorsa la circonferenza intera, questo punto si trovi confuso col punto A. Se prolungato il raggio CA, gli si faccia fare una seconda rivoluzione, mentre il punto C continua ad allontanarsi dall'origine del suo movimento, si descriverà una *seconda spirale*, poi una *terza* ec., o piuttosto queste spirali saranno una sola curva le cui rivoluzioni possono accrescersi in infinito.

797. Posto ciò, l'ordinata CM (y) : raggio CA (a) :: arco ADBN, ascissa corrispondente (x) : circonferenza ADBNA (p); dunque l'equazione alla spirale d'Archimede è $y = \frac{ax}{p}$; onde 1°. la curva è trascendente; 2°. passa per il cen-

tro C, poichè $x=0$ dà $y=0$; 3°. passa altresì per A, poichè $x=p$ dà $y=a$; 4°. fatto $x=p+x'$, l'equazione diventa $y=a+\frac{ax'}{p}$, e perciò dati ad x' i valori che son tra o e p, la spirale fa una seconda rivoluzione che termina all'estremità d'un raggio doppio del primo; e ne fa una terza, una quarta ec. se $x=2p+x''$, $x=3p+x'''$ ec. 143.

798. VII°. La Spirale Parabolica. Presa sopra un raggio CN una media proporzionale NM tra l'arco AN e una retta data g, la curva che passerà per i punti M determinati così, sarà la *Spirale Parabolica*. Sia dunque $AN=x$, $CM=y$, $AC=a$, ed avremo $y=a-\sqrt{gx}$, equazione in cui sostituendo $p+x$, $2p+x$ ec. in luogo di x, troviamo che questa curva può fare un'infinità di rivoluzioni intorno al centro C, e che perciò è del numero delle spirali. 144.

799. VIII°. La Spirale Iperbolica. Suppongo che dal punto C preso per centro sull'indefinita CP si descrivano degli archi AG, QM, PO ec. eguali in lunghezza, e che per le loro estremità G, M, O ec. si faccia passare una curva CKGMO. Questa sarà una *Spirale Iperbolica*; e ben si vede che presa $CB=AG=QM=PO$ ec. ed alzata BR parallela a CP, ella ne sarà l'asintoto, perchè può solamente incontrarla quando il raggio CM sia infinito. 145.

800. Sia il raggio $CA=a$, $AN=x$, $CM=y$, $AG=QM$ ec. $=b$; si avrà $x:b::a:y$, onde $xy=ab$. Ora sostituiti ad x dei valori $p+x$, $2p+x \ldots mp+x$, si avrà successivamente $y=\frac{ab}{p+x}$, $y=\frac{ab}{2p+x} \ldots y=\frac{ab}{mp+x}$; onde crescendo l'ascissa, scema l'ordinata, la quale diviene zero sol quando m è infinita; dunque *la spirale iperbolica fa un' infinità di giri intorno al centro prima di giungervi*.

801. IX°. La Spirale Logaritmica. Si chiama *Spirale Logaritmica* la curva che taglia sotto uno stesso angolo tutti i raggi CM condotti dal suo centro C, cosicchè la tangente MT fa sempre un angolo stesso col raggio CM. Questa curva ha molte proprietà che non possono ben dettagliarsi senza il calcolo differenziale ed integrale. 146.

802. X°. Curve a doppia curvatura. Se sopra la curva aB si alzassero dell'ordinate ST normali al piano aBC in modo che la relazione tra l'ascisse o archi $aS=s$ e l'ordinate $ST=z$ fosse espressa da un'equazione, la linea aQ che passasse per tutti i punti T, sarebbe curva in due sensi, e perciò direbbesi *Curva a doppia curvatura*: ma poichè questa nuova maniera di concepir tali curve (che per altro ci sarà utile altrove) 138.

138. non dà facilmente la relazione finita tra s e z, ecco come d'ordinario si concepiscono. Se sopra le curve aB, aN descritte con la stessa origine a nei piani DaC delle x, y e DaH delle y, z (730), si intendano alzarsi normalmente e segarsi due superficie curve, la loro comun sezione aQ sarà una *Curva a doppia curvatura*; e le curve generatrici aB, aN che scambievolmente sarebbero generate da lei conducendo da ogni suo punto le normali TS, TV sui piani DaC, DaH; si chiamano *curve di projezione*, alle quali se ne può aggiungere una terza che si formerebbe nel modo stesso sul piano CaH delle x, z. Onde 1°. la curva a doppia curvatura non può descriversi in un piano: 2°. i suoi punti son determinati da due delle tre curve di projezione, le cui equazioni perciò esprimono la natura della curva e danno il modo di descriverla. Sieno aB, aN due parabole dell'equazioni I $y^2 = px$, II. $z^2 = qy$; posto nella II il valor di y preso dalla I., verrà III. $z^4 = pq^2x$, equazione della curva di projezione sul piano delle x, z: dalla I. si ha $y = \sqrt{px}$, dalla III. $z = \sqrt[4]{pq^2x}$, onde dati ad x diversi valori, se ne hanno altrettanti per y e per z, e si descrive la curva aQ.

803. Date ora due superficie curve con le stesse coordinate x, y, z, se ne avrà la comun sezione o la curva a doppia curvatura sol che dall'equazioni alle superficie si deducan quelle di due delle tre curve di projezione. Sieno date le superficie d'un solido parabolico e d'un cono retto che col vertice stesso abbian gli assi delle x e delle y scambievolmente normali: dalle loro equazioni (730) I. $px = y^2 + z^2$, II. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + z^2$ (cangiato nel cono x in y, ed y in x come esige il dato) si ha III. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + px - y^2$, IV. $\frac{a^2(px - z^2)}{b^2} = x^2 + z^2$, equazioni alle curve di projezione (un'iperbola ed un'ellisse) che determinano la curva cercata a doppia curvatura. E' chiaro 1°. che se la III. o IV. sieno impossibili o si riducano ad un sol punto, non si avrà comun sezione e perciò nemmen curva: 2°. che se sostituito nella II. il valor di z preso non più dalla I. m dall'equazion generale d'un piano $Ax + By + Cz + D =$ (730), possan determinarsi A, B, C, D in modo che com prima ne risulti la III., non sarà la sezione una curva

doppia curvatura, ma una curva semplice che potrà descriversi sul piano dell' equazion determinata $Ax + By + Cz + D = o$.

FIG. 138.

LUOGHI GEOMETRICI.

Costruendo l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si trovò (731) che ne risultava un circolo: questo circolo si chiama il *Luogo Geometrico* dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$.

804. In generale *il luogo d' un' equazione è la linea descritta secondo il rapporto delle* x *e delle* y *che l' equazione contiene*, rapporto che somministra le costruzioni geometriche dell' *equazioni indeterminate*; così si chiamano tutte l' equazioni a due variabili, e se ne distinguono i gradi dalle più alte potenze di queste variabili. Cominciamo dal primo grado.

805. Ogni equazione di questo genere può esser rappresentata da $ay = bx + cm$, cioè $y = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$: si tratta di trovarne il luogo geometrico Sia $AP = x$ la linea dell' ascisse di cui pongo l'origine in A; sia PM un' ordinata y che faccia con AP un angolo dato APM. Presa ora sopra AP una determinata $AB = a$ e parallelamente a PM condotta $BD = b$, i triangoli simili ABD, APN daranno $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$; dunque se la data equazione fosse $y = \frac{bx}{a}$, la linea AN sarebbe il luogo cercato. Ma poichè il secondo membro ha di più $\frac{cm}{a}$, le PN debbono essere accresciute di questa quantità: perciò alzata sopra AP parallelamente a PM una $AE = \frac{cm}{a}$ e condotta per E l' indefinita M'M parallela ad AN, sarà $PM = y = PN + NM = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$, onde la retta M'M è il luogo della data equazione. Se $\frac{cm}{a}$ fosse negativa, le PN dovrebbe-

147.

147. ro diminuirsi di questa quantità, il che si fa conducendo AE′ sotto ad AP e per E′ una parallela MM″ ad AN, ed MM″ è il luogo dell'equazione $y = \frac{bx}{a} - \frac{cm}{a}$: la parte OM corrisponde al valor positivo di y, e il suo prolungamento OM″ a quello di $-y$; onde può concludersi in generale che *la linea retta è il luogo geometrico di tutte l' equazioni indeterminate del primo grado*.

806. Quelle del secondo posson tutte ridursi alla formula

$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0$$

la cui costruzione dà la natura delle curve espresse da equazioni del secondo grado, qualunque sia l' angolo delle coordinate. Risolvo pertanto quest' equazione, presa y per incognita (189), e poi fatto $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, trovo $u^2 + (b - \frac{a^2}{4})x^2 + (c - \frac{ad}{2})x + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Or per costruir l' equazione $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, supposte le coor-

148. dinate AP $= x$, PM $= y$ nel dato angolo, conduço AB $=$
149. $\frac{1}{2}d$ parallela a PM (sotto AP se d è positivo), e per mez-
150.
151. zo di BO parallela ad AP ottengo MO $= y + \frac{1}{2}d$. Sopra BO prendo ad arbitrio BE $= 1$, e condotta EF $= \frac{1}{2}a$ parallela a PM, e per B ed F l' indefinita BFN, i triangoli simili BEF, BON danno ON $= \frac{1}{2}ax$, e perciò MN $= u$. Ma le coordinate AP $= x$, MN $= u$ non sono in angolo tra loro come bisogna; e però per ridurvele, sia BN $= z$ e la retta nota BF $= n$ (652); si avrà $n : 1 :: z : x = \frac{z}{n}$, ed $u^2 + (b - \frac{a^2}{4})\frac{z^2}{n^2} + (c - \frac{ad}{2})\frac{z}{n} + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Quì può accader 1°.

che

che $b=\frac{a^2}{4}$, nel qual caso $y^2+axy+bx^2$ è un quadrato perfetto; 2°. che $b>\frac{a^2}{4}$; 3°. che $b<\frac{a^2}{4}$: sicchè questa equazione è suscettibile delle tre seguenti forme, I. $u^2-gz+r=0$, II. $u^2+gz^2-rz-s=0$, III. $u^2-gz^2-rz-s=0$.

807. Onde 1°. se nella I^a. $u^2=gz-r=g(z-\frac{r}{g})$ si faccia $z-\frac{r}{g}=t$, sarà $u^2=gt$, equazione alla parabola (748) che col parametro g, coll' angolo MNC delle coordinate, e coll' origine C del diametro, determinata dal caso di $t=0$ che dà $z=\frac{r}{g}=BC$, facilmente si descrive (753): 2°. se nella II^a. $u^2+gz^2-rz-s=\frac{u^2}{g}+z^2-\frac{rz}{g}-\frac{s}{g}+\frac{r^2}{4g^2}-\frac{r^2}{4g^2}=0$ si faccia $z^2-\frac{rz}{g}+\frac{r^2}{4g^2}=t^2$, sarà $u^2=g(\frac{r^2+4gs}{4g^2}-t^2)$, equazione all' ellisse che paragonata all' altra (764) $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, dà $\frac{n^2}{m^2}=g$, ed $m^2=\frac{r^2+4gs}{4g^2}$, onde $m=\frac{1}{2g}\sqrt{(r^2+4gs)}=CD$ ed $n=m\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g}+4s\right)}=CG$, coi quali semidiametri e col centro C determinato dal caso di $t=0$ da cui si ha $z=\frac{1}{2g}=BC$, è facile descriver la curva (764): 3°. se nella III^a. $\frac{u^2}{g}-z^2-\frac{rz}{g}-\frac{s}{g}-\frac{r^2}{4g^2}+\frac{r^2}{4g^2}=0$ si faccia $z^2+\frac{rz}{g}+\frac{r^2}{4g^2}=t^2$, sarà $u^2=g(t^2+\frac{4gs-r^2}{4g^2})$, equazione all' iperbola il cui centro C è determinato dal caso di $t=0$ da cui si ha $z=-\frac{r}{2g}=BC$; e quanto ai semidiametri, se $4gs>r^2$, paragonata l' equazione alla sua analoga (779) $y^2=$

148.

149.

150.

$\frac{m^2}{n^2}(x^2+n^2)$, avremo $n=\frac{1}{2g}\sqrt{(4gs-r^2)}$ ed $m=\ldots$ $\frac{1}{2}\sqrt{\left(4s-\frac{r^2}{g}\right)}$: ma se $4gs<r^2$, l'equazione di confronto sarà (779) $y^2=\frac{n^2}{m^2}(x^2-m^2)$ che dà $m=\frac{1}{2g}\sqrt{(r^2-4gs)}$ ed $n=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g}-4s\right)}$; onde la curva si potrà sempre descrivere (782). Che se nell'equazione primitiva (806) manchi y^2, si libererà x^2 dal suo coefficiente, e si avrà un'equazione $x^2+ayx+bx+py+q=x^2+(ay+b)x+py+q+\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=0$, e fatto $x^2+(ay+b)x+\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=u^2$, l'equazione $u^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2+py+q=0$ sarà all'iperbola e si costruirà come la terza formula. Infine se manchi anche bx^2, liberato xy dal suo coefficiente, resterà un'equazione $xy+ax+by-p=0$, ove fatto $b+x=u$, si ha $yu+au-ab-p=0$, e fatto $y+a=z$, viene $uz=ab+p$, equazione all'iperbola tra gli asintoti: onde poste le coordinate AP, PM nel dato angolo APM, prolungata AP verso D finchè sia $AD=b$, e condotta $DC=a$ parallela a PM, si descriverà tra gli asintoti CQ, CK l'iperbola della potenza $ab+p$ (774. 782), e sarà $QM=a+y=z$, $QC=b+x=u$ e $QM\times QC=uz=ab+p$.

151.

152.

808. Segue da tutto ciò che *qualunque equazione indeterminata del secondo grado appartiene a una sezione conica*, e che la sua specie dipende dai tre primi termini $y^2+axy+bx^2$ della formula generale. Perciò

I°. Se questi tre termini formano un quadrato perfetto, cioè se $b=\frac{a^2}{4}$, o se non resta dei tre primi termini altro che y^2 o x^2, l'equazione apparterrà alla parabola.

II°. Se $b>\frac{a^2}{4}$, l'equazione è all'ellisse che per altro diviene un circolo quando $CD=m=CG=n=m\sqrt{g}$ (807) cioè $g=1$, e l'angolo BNM è retto; allora $BE^2=1=BF^2+FE^2=n^2+\frac{a^2}{4}$ (806); e poichè $g=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\frac{1}{n^2}=1$,

149.

si ha $b = n^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, e l' equazione primitiva diventa $y^2 + axy + x^2 + cx + dy + f = 0$.

III°. Se $b < \frac{a^2}{4}$, l' equazione è all' iperbola quand' anche b sia negativa; e se $b = 1$, l' iperbola è equilatera. Se manca uno dei quadrati y^2, x^2, restando il rettangolo xy, la curva è egualmente iperbola; e se y^2, x^2 mancano nel tempo stesso, l' equazione è agli asintoti.

809. Può accadere che l' equazione proposta non sia realmente del secondo grado: tale è $y^2 - xy + \frac{x^2}{4} = a^2$; la sezione conica ch' essa rappresenta, degenera in linea retta, come dee succedere per una parabola il cui parametro sia nullo, e che perciò si confonda col suo asse. Che se l' equazione proposta implichi contradizione, il calcolo lo farà conoscere colle operazioni che indicherà, come conducendo a descrivere un circolo di raggio immaginario ec.

Problemi indeterminati del secondo grado.

810. I. Dati i due punti A e B, trovar la curva AMB tale che conducendo da qualunque suo punto M le rette MA, MB, l' angolo AMB sia sempre lo stesso. Condotta MP normale ad AB, sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, $tang\,AMB = t$; avremo (646) $tang\,AMP = \frac{x}{y}$, e $tang\,BMP = \frac{a-x}{y}$. Dunque (615) $t = \frac{\frac{x}{y} + \frac{a-x}{y}}{1 - \frac{x(a-x)}{y^2}}$; il che dà $y^2 + x^2 - ax - \frac{ay}{t} = 0$, equazione al circolo (808). Ne compisco i due quadrati e sarà $\left(y - \frac{a}{2t}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4t^2}$; poi divido AB in mezzo nel punto F, dal quale alzo $EF = \frac{a}{2t}$ perpendicolare alla stessa AB, e col centro E e raggio $AE = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4t^2}\right)}$ descrivo il circolo AMB, che è il luo-

153.

153. go dell' equazione; poichè condotta EQ parallela ad AB, ho $EQ = \frac{1}{2}a - x$, $MQ = y - \frac{a}{2t}$; dunque ec. Or poichè $EF = \frac{a}{2t}$, deve essere l' angolo $AEF = AMB$: infatti essendo $EF\left(=\frac{a}{2t}\right) : FA\left(=\frac{1}{2}a\right) :: R(=1) : t = tang\, AEF$ (646), i due angoli AMB ed AEF hanno una stessa tangente t; dunque condotta AT in modo che l' angolo TAB sia eguale all'angolo AMB, la retta AE perpendicolare sopra AT incontrerà EF nel centro del circolo cercato.

154. 811. II. La data retta AB si muova nell' angolo acuto BCA in modo che le sue estremità A e B stiano sempre sui lati dell' angolo dato: cerco la curva descritta da un dato punto M di AB. Condotta PM parallela ad AC, sia $CP = x$, $PM = y$, $AM = m$, $BM = n$, $cos\, ACB = cos\, MPB = c$: avrò $BP = \frac{nx}{m}$, e il triangolo MPB darà (651) $\frac{2cnxy}{m} = y^2 + n^2 + \frac{n^2x^2}{m^2}$, ovvero $y^2 - \frac{2ncxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - n^2 = 0$, equazione all' ellisse; poichè $\frac{n^2}{m^2} > \frac{n^2c^2}{m^2}$ cioè $1 > c$ (808). Faccio $y - \frac{cnx}{m} = u$, e posto $sen\, MPB = s$, si avrà $u^2 + \frac{n^2s^2x^2}{m^2} - n^2 = 0$. Presa dunque $CE = 1$, e condotta $EF = \frac{cn}{m}$ parallela ad AC, se si conduce CFQ, si avrà $QM = u$. Sia dunque $CF = f$; $CQ = z$; si avrà $x = \frac{z}{f}$; dunque $u^2 = \frac{n^2s^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{s^2} - z^2\right)$. Quindi i semidiametri conjugati CO e CG saranno respettivamente espressi per $\frac{fm}{s}$ e per n, e poichè si conosce l' angolo GCO, è facile descriver l' ellisse (766). Se l' angolo ACB sia retto, l' equazion primitiva diventerà $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, e apparterrà a un' ellisse dei semiassi m, n. Quindi dati gli assi potrà descriversi l' ellisse; essendo il maggiore $2a$, il minore $2b$, prendo $AM = a$, $MB = b$ e muo-

vo AB tra i lati d' una squadra; il punto M descriverà il quarto d' ellisse richiesta. FIG. 154.

812. III. Data la parabola NAK, trovare il luogo di tutti i punti M tali che le due tangenti NM, KM faccian sempre l' angolo stesso NMK. Condotte MP, KL, NQ normali all' asse AQ, sia $AP = x$, $PM = y$; $NQ = z$, $KL = u$, il parametro della parabola $= p$, $tang\,NMK = t$, onde $AQ = AT = \frac{z^2}{p}$, $AL = AS = \frac{u^2}{p}$ (748.751), $QT = \frac{2z^2}{p}$, $LS = \frac{2u^2}{p}$, e attesi i triangoli simili TPM, TQN, ed SPM, SLK, avremo $\frac{2z^2}{p} : z :: \frac{z^2}{p} - x : y$ e anche $\frac{2u^2}{p} : u :: x - \frac{u^2}{p} : y$, e di quì $z = y + \sqrt{(y^2 + px)}$, $u = -y + \sqrt{(y^2 + px)}$, $u + z = 2\sqrt{(y^2 + px)}$ ed $uz = px$. Ora $NMK = NTQ + KSL$ (425), e perchè (646) $tang\,NTQ = \frac{p}{2z}$ e $tang\,KSL = \frac{p}{2u}$, sarà (614) $t = \frac{2p(u+z)}{4uz - p^2}$, e posti per $u + z$ ed uz i lor valori, $t = \ldots \frac{4\sqrt{(y^2 + px)}}{4x - p}$; e quadrando, $y^2 = t^2\left[\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{px}{t^2}\right]$, equazione all' iperbola (808). Sia $x - \frac{p}{4} - \frac{p}{2t^2} = \varphi$, e verrà $y^2 = t^2\left[\varphi^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2 + 1)\right]$ che paragonata con $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ (807) e chiamato s il seno dell' angolo NMK, dà $m = \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2 + 1)} = (610)\ \frac{p}{2ts}$ ed $n = \frac{p}{2s}$: onde diminuendo le x di $AC = \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}$, l' iperbola del centro C e dei semiassi $CD = m$, $CG = n$, sarà il luogo dell' equazione. E si osservi 1°. che se l' angolo NMK sia ottuso, la tangente t sarà negativa: ma ciò nulla cangia nell' equazione che contiene sole potenze pari di t: onde dei due rami iperbolici MDm, $M'dm'$ quello soddisfà al problema quando il dato angolo è acuto, questo quando è ottuso: 2°. che se il dato angolo è retto, si ha $t = \infty$ (610), onde la linea cercata è la direttrice della stessa parabola (197.749); cosicchè due tangenti della parabola che partono da un punto della direttrice, forman sempre un angolo retto. 155.

156\. 813. IV. Far passare una Sezione conica per cinque punti dati A, C, D, B, E. Per due di questi punti conduco AB e dagli altri punti le perpendicolari CF, DH, GE sopra di essa, e poi suppongo che l'equazione della sezione conica cercata sia $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy + g = 0$ e faccio AF $= p$, FC $= q$, AG $= p'$, GE $= q'$, AH $= p''$, DH $= q''$, AB $= p'''$. Quando $x = 0$, sarà $y = 0$, onde $g = 0$, e però l'equazione si riduce ad $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$. Quindi secondo che $x = p, = p', = p'', = p'''$, si ha $y = q, = -q', = q'', = 0$: sicchè si hanno le quattro equazioni, $aq^2 + bpq + cp^2 + dp + fq = 0 \ldots aq'q' - bp'q' + cp'p' + dp' - fq' = 0 \ldots aq''q' + bp''q'' + cp''p'' + dp'' + fq'' = 0 \ldots cp'''p''' + dp''' = 0$, da cui si avranno i valori di b, c, d, f, che sostituiti in $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$, danno l'equazione della curva cercata. Il metodo può applicarsi a risolvere un somigliante problema per le linee del terzo, e del quarto grado ec.

814\. Così si trova per approssimazione la legge di più quantità legate insieme con certi rapporti. Suppongo per esempio le tre quantità BC, DE, FG dipendenti da' tre altre AB, (157) AD, AF; si vuole in generale una legge che unisca queste sei quantità. Immagino l'indefinita AF, e riguardo le sue parti AB, AD, AF come l'ascisse d'una curva CEMG; suppongo che ogni ordinata y sia una funzione indeterminata $A + Bx + Cx^2 +$ ec. dell'ascissa corrispondente (se le date quantità fossero quattro BC, DE, PM, FG, prenderei quattro termini per esprimere questa funzione). Or giacchè si ha $y = A + Bx + Cx^2$, faccio AB $= a$, BC $= b$, AD $= a'$, DE $= b'$, AF $= a''$, FG $= b''$, onde le tre equazioni $b = A + Ba + Ca^2 \ldots b' = A + Ba' + Ca'a' \ldots b'' = A + Ba'' + Ca''a''$, con cui si determinano i coefficienti A, B, C e l'equazione approssimata della curva CM, ove una quantità AP dipende da un'altra PM, come AB dipende da BC, AD da DE ec. Tale è il *Metodo dell'Interpolazioni*.

815\. Con questo si ha l'equazione approssimata d'una curva segnata a caso sulla carta. Basta 1°. abbassar delle perpendicolari da varj punti di questa curva (e in particolare da quelli ove cangia molto di concavità) sopra una retta presa per retta dell'ascisse: 2°. supporre che l'equazione della curva sia $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ec. in cui si fanno entrar tanti coefficienti indeterminati quante son le perpendicolari abbassate: 3°. determinar come sopra i coefficienti A, B, C, D ec.

Problemi determinati fino al quarto grado.

816. I luoghi di due equazioni indeterminate del secondo grado posson costruirsi sulla stessa retta dell' ascisse, con la stessa origine e nello stesso angolo delle coordinate. In tal caso le due curve si taglieranno in punti tali che l' ordinate corrispondenti a questi, saranno le radici dell' equazione determinata che si avrebbe riunendo le due equazioni in una che non contenesse altro che x o y. Reciprocamente se un' equazione determinata del terzo o quarto grado si divida in due che contengano x ed y, cosicchè eliminando x o y si ritrovi la data, è chiaro che costruendole come sopra, i punti d' intersezione delle due curve avranno per coordinate i valori dell' incognita: così se nell' equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ si faccia $x^2=py$, sarà $p^2y^2+apxy+bpy+cx+d=0$, equazione a una sezione conica, che costruita con la parabola dell' equazione $x^2=py$, taglierà questa curva in dei punti, le cui ascisse corrispondenti saranno i valori di x. Quando la data equazione ha quattro radici reali, le due curve si tagliano in quattro punti; quando ne ha due sole, si tagliano in due; se tutte sono immaginarie, non si ha intersezione; con radici eguali, le curve si toccano; e perchè s' incontrino in un numero di punti eguale a quello delle radici reali ed ineguali, si prende l' equazione d' una delle due curve con y alla sola prima dimensione. Del resto, il metodo, sì bello in teorica, è stato in pratica quasi abbandonato per l' impossibilità di descrivere esattamente le Curve.

817. I. Date due rette a, b, trovar tra esse due medie proporzionali x, y. Poichè per ipotesi $\because a:x:y:b$, sarà $x^2=ay$, ed $y^2=bx$; onde costruite le parabole di queste equazioni con la stessa retta dell' ascisse, lo stesso vertice e lo stesso angolo delle coordinate (che ordinariamente si suppone retto), esse daranno con le loro intersezioni i valori cercati di x, y.

Ma non deve in generale costruirsi un' equazione del terzo o quarto grado senza far uso del circolo, curva tanto più comoda a descriversi. Che se per introdurre il circolo nelle soluzioni di questo genere, occorre talvolta una certa destrezza, vi sono anche certi casi, in cui si presenta da se. Per esempio, sommando le due equazioni $x^2-ay=0$, $y^2-bx=0$, e supposte le coordinate in angolo retto, nasce l' equazione al circolo $x^2+y^2-ay-bx=0$. Descritta dunque una parabola AM del parametro b sull' asse AP, ella sarà il 158.

158. luogo dell'equazione $y^2 = bx$. Per trovar quello di $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, sia $x - \frac{1}{2}b = u$, e $y - \frac{1}{2}a = z$: avremo $u^2 + z^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, e condotta da A perpendicolarmente ad AP la retta $AB = \frac{1}{2}a$, e per B l'indefinita BCQ parallela ad AP, se preso $CB = \frac{1}{2}b$ si descriva un circolo col raggio CA, egli taglierà la parabola in un punto M tale che condotta la perpendicolare PM, le coordinate AP, PM saranno le due medie-proporzionali cercate.

Supposto $b = 2a$, il cubo fatto sopra AP sarebbe doppio del cubo a^3 (214), ciò che risolve con poco il problema della duplicazione del cubo sì famoso tra gli Antichi. Anzi può generalizzarsi questo problema prendendo $b = \frac{ma}{n}$ per trovare un cubo $AP^3 = \frac{ma^3}{n}$ che sia ad un dato cubo a^3 nella ragione $m:n$.

159. 818. II. Dividere in tre parti eguali un arco di circolo BF.

Suppongo MF il terzo dell' arco BF e oltre le normali BOG, MPm sul raggio AF, conduco Bm ed mR normale a BG. Poi fatto $AP = x$, $PM = y$, $AM = a$, $AO = b$, $BO = c$, i triangoli simili AMP, BmR daranno $x : y :: c + y : x - b$, cioè $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$, equazione all'iperbola equilatera (808) che costruendosi determinerà il punto M nel quale il circolo e l'iperbola si taglieranno. Ora ella può mettersi sotto questa forma $\left(y + \frac{1}{2}c\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}b^2$; dunque (807) se $c > b$, l'equazione apparterrà al second' asse, e se $c < b$, al primo. In quest' ultima supposizione, dal centro A si conduca $AD = \frac{1}{2}c$ normale ad AF, e da D si tiri $DC = \frac{1}{2}b$ parallela ad AO; il punto C sarà il centro dell' iperbola, e se si prenda $CL = CK = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)}$, e si descriva sull' asse LK un' iperbola KM, ella taglierà il circolo nel punto cercato M. L' iperbola opposta M'LM'' taglia il circolo in due punti M' ed M'', il primo dei quali dà (635) l' arco F'M' terza parte di F'M'B, ed il secondo determina l' arco F'M'' terza parte di F'M''GFB; il punto G non dà soluzio-

ne:

ne: ma la radice $GO = -c$ è quella per cui può dividersi l'equazione $4y^4 + 4cy^3 - 3a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2 = 0$ che risulta dai due luoghi $y^2 - a^2 + x^2 = 0$, $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$. 159.

Questi luoghi sommati danno $y^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}a^2$, equazione alla parabola. Perciò condotta dal punto A parallelamente a BG la retta $AD = \frac{1}{4}c$, si conduca $DC = \frac{\frac{1}{8}c^2 + a^2}{b}$ parallela ad AF, e si descriva col vertice C e asse CD una parabola del parametro $\frac{1}{2}b$; essa taglierà il circolo ne' punti cercati M, M', M''. Posson variarsi queste soluzioni in molte maniere, moltiplicando le due equazioni del problema per delle quantità indeterminate, e sommandone o sottraendone i prodotti: il che conduce a delle sezioni coniche differenti, tutte egualmente proprie a risolvere il problema. Così per risolverlo coll'ellisse, basterà moltiplicar l'equazione $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, per l'indeterminata m, e aggiungerne il prodotto alla seconda equazione; si avrà 160.

$$y^2 + \frac{(m-1)x^2 + bx + cy - a^2m}{m+1} = 0$$ che appartiene all'ellisse quando $m > 1$ o positiva, ed all'iperbola quando $m < 1$ o negativa. Si può inoltre determinare m con una condizione arbitraria; per esempio, se si volesse che gli assi dell'ellisse fossero tra loro in ragione di $p:q$, dovrebbe essere $\frac{m-1}{m+1} = \frac{p^2}{q^2}$, il che dà $m = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2}$.

819. III. Dividere lo spazio parabolico ACB con una retta CM in due settori eguali ACM, BCM. Condotta MP normale ad AC, sia $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, $BC = b$, il parametro della parabola $= p$; avremo, come ben presto si vedrà, $\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(a - x) = ACM = \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{3}ab$, ovvero $xy + 3ay = 2ab$, equazione all'iperbola tra gli asintoti. Prolungata AP verso F, onde sia $AF = 3AC$ e condotta FK perpendicolare ad FA, tra gli asintoti FK, FA si descriva una iperbola equilatera della potenza $2ab$; essa sarà il luogo dell'equazione $xy + 3ay = 2ab$ e taglierà la parabola nel punto richiesto M. 161.

Volendosi servir del circolo, poichè $b^2 = ap$ ed $y^2 = px$, sarà $x = \frac{y^2}{p} = \frac{ay^2}{b^2}$, valore che sostituito nell'equazione $xy + 3ay = 2ab$, la cangierà in $y^3 + 3b^2y - 2b^3 = 0$; la

161. moltiplico per y e diviene $y^4+3b^2y^2-2b^3y=0$, da cui, sostituito $\frac{b^2x}{a}$ ad y^2, ricavo $x^2+3ax-\frac{2a^2}{b}y=0$: a questa aggiungo $y^2-px=0$, ed ho $y^2+x^2+(3a-p)x-\frac{2a^2}{b}y=0$, equazione al circolo. Alzata dal punto A normalmente ad AP una retta $AD=\frac{a^2}{b}$, si conduca ad AD dalla parte opposta al punto M una perpendicolare $DC'=\frac{1}{2}(3a-p)$ (qui si suppone $3a>p$), e col raggio C'A e centro C' si descriva un arco di circolo; quest' arco taglierà la parabola nel punto richiesto M; e $PM=b[\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})}-\sqrt[3]{(-1+\sqrt{2})}]$.

820. IV. Trovar le radici dell' equazione del quarto grado $x^4-p^2x^2+p^2qx+p^3r=0$ per mezzo d' un circolo e d' una parabola. Fatto al solito $x^2=py$, viene $y^2+qx-py+pr=0$; vi unisco $x^2-py=0$ e nasce l' equazione al circolo $x^2+y^2-2py+qx+pr=0$. Descritta dunque col parametro p

164. la parabola M'AM''' che abbia AQ per asse perpendicolare ad AP, e presa $AD=p$, $DC=\frac{1}{2}q$ normale ad AD dalla parte in cui è nella figura (si prenderebbe dall' altra se fosse negativo), si troverà che un circolo del centro C e raggio $\sqrt{(CA^2-pr)}$ taglierà la parabola ne' punti M, M', M'', M''', che determineranno le radici dell' equazione, due positive, cioè MQ, M'Q', l'altre negative. Se l' equazione da costruirsi fosse $x^4+p^2x^2-p^2qx+p^3r=0$, presa al solito $x^2=py$, si avrebbe $y^2+x^2-qx+pr=0$, equazione al circolo come nel caso passato, ma più facile a costruirsi.

Si cerchino ora le radici dell' equazione $x^4-pqx^2+p^2rx+p^2m^2=0$ per mezzo di un circolo e d' un' iperbola tra gli asintoti. Presa $xy=pm$, viene $x^4-pqx^2+p^2rx+x^2y^2=0=x^2+y^2-pq+\frac{p^2r}{x}=x^2+y^2-pq+\frac{pry}{m}$, equa-

165. zione al circolo. Tra gli asintoti perpendicolari QAQ', P'''AP' descritte l' iperbole equilatere della potenza pm, prendo sotto AP la retta $AC=\frac{pr}{2m}$, e il circolo del centro C, col raggio $\sqrt{(AC^2+pq)}$, taglierà l' iperbole opposte nei quattro punti M, M', M'', M''', i quali determineranno come sopra i quattro valori di x con le ascisse AP, AP', AP'', AP'''.

ELEMENTI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

Fondamenti di questi due Calcoli.

821. LE quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c ec., non crescono nè scemano; le variabili che si esprimono con l' ultime x, y, z ec., crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo è una quantità costante, mentre le sue ascisse e le sue ordinate son quantità variabili (478), che hanno anche una relazione scambievole (729): se questa non vi fosse si direbbero *indipendenti tra loro*. La porzione finita di cui una variabile x o y cresce o scema, si chiama *differenza finita* e si scrive δx (*differenza di* x) o δy (*differenza di* y); cosicchè $x \pm \delta x$ è la variabile accresciuta o diminuita della sua differenza, e δ è il segno con cui si indica il cangiamento finito di essa, il quale avrà + se ella cresce, e — se scema, onde $\delta\ (x+y)$ non significa quì moltiplicazione, ma la differenza $\delta x + \delta y$ di $x+y$.

Generalmente $\delta\,[\varphi(x)]$, $\delta\,[f(x,y)]$ ec significano la differenza d' una funzione φ di x o di una funzione f di x, y ec.: ove per *funzione* si intende quì una quantità composta di x e di costanti, o di x, y e di costanti, ma tanto generale che rappresenta tutte le infinite quantità particolari che posson formarsi con x o con x, y e con delle costanti.

822. Sia la curva CMG con le coordinate AB e BC, AD e DE, AF ed FG ec.; se AB $= x$ e 157.

157. $BC = y$, sarà $AD = AB + BD = x + \delta x = x'$, $DE = Da + aE = y + \delta y = y'$, $AF = AD + DF = x' + \delta x' = x''$, $FG = Fb + bG = y' + \delta y' = y''$ ec.; dunque $x' - x = \delta x$, $x'' - x' = \delta x'$, $\delta x' - \delta x = \delta(x' - x) = \delta(\delta x) = \delta\delta x = \delta^2 x$: del pari $y' - y = \delta y$, $y'' - y' = \delta y'$, $\delta y' - \delta y = \delta^2 y$. Ora le quantità $\delta^2 x$, $\delta^2 y$ ec. diconsi *differenze seconde*, e $\delta^3 x$, $\delta^3 y$ sarebbero le *terze* ec., ove si osservi che $\delta^2 x$ è molto diverso da δx^2, perchè $\delta^2 x$ è la differenza seconda di x, mentre δx^2 è il quadrato della prima δx. Ordinariamente l'una delle due differenze prime δx, δy si riguarda come *costante*, supponendo per esempio $BD = \delta x = DF = FI$ ec.: ma non potranno farsi costanti ambedue, poichè allora sarebbe il triangolo $CaE = EbG$, e la curva CG si supporrebbe una retta.

. Solo per render più semplici i calcoli si fa costante δx o δy; del resto, o si faccia o no, il risultato è lo stesso. Sia $BC = y$, $DE = y'$, $FG = y'' = y' + \delta y' = y + 2\delta y + \delta^2 y$, ed $y = x^2$: verrà $\delta y = 2x\delta x + \delta x^2$ (827), e presa costante $\delta x = BD = DF$, sarà $\delta^2 y = 2\delta x^2$, e I. $FG = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2$. Ma se $BP = \delta x$, $PF = \delta x'$, avremo $\delta y = 2x\delta x + \delta x^2$, $\delta^2 y = 2\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + \delta^2 x^2$ (834), e II. $FG = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + \delta^2 x^2$. Ora avendosi sempre $\delta x + \delta x' = 2\delta x + \delta^2 x = BP + PF = BD + DF = 2\delta x$, se questo valore di $2\delta x$ si ponga nella I., verrà esattamente la II., onde la I. ove δx è costante, non differisce dalla II. ove non lo è.

823. Dall'equazioni $y' = y + \delta y$, $y'' = y' + \delta y'$, $y''' = y'' + \delta y''$ ec., $\delta y' = \delta y + \delta^2 y$, $\delta y'' = \delta y' + \delta^2 y'$, $\delta^2 y' = \delta^2 y + \delta^3 y$ ec., si ricava facilmente che presa δx costante, all'ascissa $x' = x + \delta x$ corrisponde l'ordinata $y' = y + \delta y$, all'ascissa $x'' = x + 2\delta x$ corrisponde l'ordinata $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$, all'ascissa $x''' = x + 3\delta x$ corrisponde l'ordinata $y''' = y + 3\delta y + 3\delta^2 y + \delta^3 y$ ec., ove i coefficienti dei termini son quelli delle varie potenze d'un binomio; dunque in generale all'ascissa $x + n\delta x$ corrisponderà un'ordinata $Y =$

$$y + n\delta y + n \cdot \frac{n-1}{2}\delta^2 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\delta^3 y + \text{ec.},$$

teorema di cui può farsi un buon uso per sommar le serie.

Se $\delta x, \delta y$ divengano dx, dy (842), e si supponga $ndx = \pm a$ quantità finita, sarà (197) $n = \infty = n-1 = n-2$ ec. $= \frac{a}{dx}$, ed $Y = y \pm \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{2dx^2} \pm \frac{a^3 d^3 y}{2.3dx^3} +$ ec., nuovo teorema di cui parleremo altrove. E' chiaro che a può anche supporsi infinitesima purchè allora si riguardi dx come infinitesima del second' ordine.

824. Che se sia ora IH $= y$, FG $= 'y$, DE $= ''y$, BC $= '''y$ ec. premettendo l' accento per indicare il progresso dell' ordinate all' indietro, avremo $Hc = \delta'y$, $Gb = \delta''y$, $Ea = \delta'''y$ ec.; onde $y - \delta'y = 'y$, $'y - \delta''y = ''y$, $''y - \delta'''y = '''y$ ec., e però $y = \delta'y + 'y = \delta'y + \delta''y + ''y = \delta'y + \delta''y + \delta'''y + '''y$ ec. $= \delta('y + ''y + '''y$ ec. $)$, altro teorema importante da cui si ha che un' ordinata y o in generale una *funzione* qualunque di y è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono. Dunque 1°. lo spazio Hi, l' arco Hh ec., tutte funzioni di y come vedremo, son la differenza della somma degli spazj GI, EF ec. o degli archi GH, EG ec., ovvero d' uno spazio qualunque CI o di un qualunque arco CH ec.: 2°. supposta costante $\delta y = \delta'y = \delta''y$ ec. $= 1$, sarà $y = \delta(y - 1 + y - 2 + y - 3 +$ ec. $)$: in tal caso se x è funzione di y, la serie ec. $'''x, ''x, 'x, x, x', x'', x'''$ ec. si scrive da molti $x_0, x_1, x_2 \ldots x_{y-2}, x_{y-1}, x_y, x_{y+1}, x_{y+2}$ ec.: noi non useremo questa notazione. 157.

825. Come il cercar la differenza d' una variabile dicesi *differenziare*, così il risalir dalla differenza alla variabile stessa chiamasi *sommare* o *integrare*; e come la differenza si indica con δ, così la somma può indicarsi con σ; onde $\sigma\delta x, \sigma\delta^2 x$ ec. vuol dir la somma di cui δx o $\delta^2 x$ son la differenza. Ma quì si rifletta 1°. che tanto è $\sigma a \delta x$ che $a\sigma\delta x$ perchè l' integrazione non riguarda mai le costanti; onde se

δx sia costante (822), si avrà $\sigma\delta x = \delta x\sigma 1$ ec.: 2°. che δx tanto è differenza di x che di $x \pm a$, giacchè a essendo costante non ha differenza, cioè non cresce nè scema (821); onde l' eguaglianza della differenziale di due variabili non prova già che le variabili sono eguali, ma solo che posson differire d' una costante, la quale sparisce differenziando, e poi si supplisce sommando coll' aggiungere alla somma l' indeterminata C (*costante*) da determinarsi secondo le circostanze: così $\sigma\delta x = x + C$, $\sigma\delta^2 x = \delta x + C$ ec. Tra poco faremo sentire anche meglio la necessità e l' uso di quest' aggiunta: solo osservo che può darsi alla costante una forma che l' assomigli agli altri termini; poichè se, per esempio, nell' equazione $y = ax^n + C$ sia b il valor di x che rende $y = 0$, si avrà $ab^n + C = 0$, e $C = -ab^n$, onde $y = a(x^n - b^n)$. Passiamo al calcolo delle differenze finite.

826. Vogliasi la differenza finita di $a^2 + bx + cy - fz = u$; avremo (821) $u + \delta u = a^2 + bx \pm b\delta x + cy \pm c\delta y - fz \mp f\delta z = u'$, onde $u' - u = \delta u = \pm b\delta x \pm c\delta y \mp f\delta z$. Dunque all' opposto $\sigma(b\delta x + c\delta y - f\delta z) = bx + cy - fz + C$.

827. Sia da differenziarsi $x^n = u$; avremo $u + \delta u = (x \pm \delta x)^n = u'$, ed $u' - u = \delta u = \pm nx^{n-1} \times \delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2 \pm n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\delta x^3 \pm$ ec.: così $\delta(x^2) = 2x\delta x + \delta x^2$, $\delta(x^3) = 3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3$, ec. Dunque $\sigma(\pm nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2} \times x^{n-2}\delta x^2 \pm$ ec. $) = x^n + C$. Sia δx costante e 1°. $n = 1$; dunque $\sigma\delta x = (825)\ \delta x\sigma 1 = x$, e $\sigma 1 = \frac{x}{\delta x}$: 2°. $n = 2$; dunque $\sigma(2x\delta x + \delta x^2) = 2\delta x\sigma x +$

$\delta x^2 \sigma 1 = x^2$, e $\sigma x = \frac{x^2}{2\delta x} - \frac{x}{2}$: 3°. $n = 3$; dunque $\sigma(3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3) = 3\delta x \sigma x^2 + 3\delta x^2 \sigma x + \delta x^3 \sigma 1 = x^3$, e $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3\delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\delta x}{6}$ ec. ec.; onde se $\delta x = 1$, verrà $\sigma 1 = x$, $\sigma x = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, $\sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, ec. ec. E nel modo stesso dalle seguenti differenze dei rotti, dei radicali, delle funzioni circolari ec. si otterranno le respettive somme che lasceremo ormai di notare, bastandoci di avvertire in generale che per aver le somme bisogna riflettter molto sulle differenze.

828. Si voglia la differenza di $\frac{x^2}{a+x} = u$; avremo $u + \delta u = \frac{(x \pm \delta x)^2}{a+x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x + (a+x)\delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} + \frac{\delta x^2}{a+x\pm\delta x}$, cioè riducendo in serie questi rotti (273) e sommando le serie, $\delta u = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x}{(a+x)^2} + \ldots$, $\frac{a^2\delta x^2}{(a+x)^3} \mp \frac{a^2\delta x^3}{(a+x)^4}$ ec.

829. Sia da differenziarsi $\sqrt{(a+x)} = u$; avremo $u + \delta u = \sqrt{(a+x\pm\delta x)} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \sqrt{(a+x\pm\delta x)} - \sqrt{(a+x)}$: ma (161) $\sqrt{(a+x\pm\delta x)} = (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec.; dunque $\delta u = -(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} -$ ec. $= \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec. Del pari . . . .

$\delta\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}\right) = \delta u = \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\sqrt{(ax+x^2\pm x\delta x)}-\sqrt{(ax+x^2\pm a\delta x\pm x\delta x)}}{\sqrt{(x^2\pm x\delta x)}}$, cioè riducendo in serie i tre radicali (161) e poi il rotto che ne risulta (273), $\delta u = \frac{\mp a\delta x}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots\ldots$
$\frac{(3a^2+4ax)\delta x^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3+12a^2x+8ax^2)\delta x^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.

830. Sia da differenziarsi $sen\,x$ e $cos\,x$. Supposto $x+\delta x=z$, $sen\,x+\delta(sen\,x)=sen\,z$ e $cos\,x+\delta(cos\,x)=cos\,z$, si avrà $\delta(sen\,x)=sen\,z-sen\,x=$ (620) $2\,sen\,\frac{1}{2}\delta x\,cos(x+\frac{1}{2}\delta x)$ e $\delta(cos\,x)=cos\,z-cos\,x=$ (620) $-2\,sen\,\frac{1}{2}\delta x\,sen(x+\frac{1}{2}\delta x)$. Si troverà nel modo stesso (620) $\delta(tang\,x)=\frac{sen\,\delta x}{cos\,x\,cos(x+\delta x)}$ e $\delta(cot\,x)=-\frac{sen\,\delta x}{sen\,x\,sen(x+\delta x)}$.

Anche in altro modo posson differenziarsi $sen\,x$ e $cos\,x$. Poichè fatto $sen\,x=u$, avremo $u+\delta u=sen(x\pm\delta x)=u'$, onde $u'-u=\delta u=sen(x\mp\delta x)-sen\,x$: ma (614) $sen(x\pm\delta x)=sen\,x\,cos\,\delta x\pm sen\,\delta x\,cos\,x$, e $sen\,\delta x=\delta x-\frac{\delta x^3}{2.3}+\ldots\frac{\delta x^5}{2.3.4.5}$ ec., $cos\,\delta x=1-\frac{\delta x^2}{2}+\frac{\delta x^4}{2.3.4}$ ec. (628); dunque $\delta u=-sen\,x+sen\,x(1-\frac{\delta x^2}{2}+\text{ec.})\pm cos\,x(\delta x-\frac{\delta x^3}{2.3}+\text{ec.})=\pm\delta x\,cos\,x-\frac{\delta x^2\,sen\,x}{2}\mp\frac{\delta x^3\,cos\,x}{2.3}+\frac{\delta x^4\,sen\,x}{2.3.4}\pm$ ec. Del pari volendo la differenza di $cos\,x=u$, verrebbe $\delta u=cos(x\pm\delta x)-cos\,x=-cos\,x+cos\,x(1-\frac{\delta x^2}{2}\text{ ec.})\mp sen\,x\,(\delta x-\frac{\delta x^3}{2.3}\text{ ec.})=\mp\delta x\,sen\,x-\frac{1}{2}\delta x^2\,cos\,x\pm\frac{1}{2.3}\delta x^3\,sen\,x$ ec.

831. Sia da differenziarsi $lx=u$, intendendo per l il logaritmo naturale di x; avremo $u+\delta u=l(x\pm\delta x)=u'$ onde $u'-$

de $u' - u = \delta u = l(x \pm \delta x) - lx = l(1 \pm \frac{\delta x}{x}) = (303) \pm \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\delta x^3}{3x^3} -$ ec.

832. Vogliasi differenziare una quantità con esponente variabile o l'*esponenziale* $a^{mx} = u$; avremo $u + \delta u = \ldots a^{mx \pm m\delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = a^{mx \pm m\delta x} - a^{mx}$: ma (143) $a^{mx \pm m\delta x} = a^{mx} \cdot a^{\pm m\delta x}$ ed $a^{\pm m\delta x} = 1 \pm m\delta x la + \frac{1}{2} m^2 \delta x^2 l^2 a \pm$ ec. (307); dunque $\delta u = - a^{mx} + a^{mx} (1 \pm m\delta x la + \frac{1}{2} m^2 \delta x^2 l^2 a \pm \text{ec.}) = \pm m a^{mx} \delta x la + \frac{1}{2} m^2 a^{mx} \times \ldots \delta x^2 l^2 a \pm$ ec.

833. Con egual facilità si differenziano i prodotti di più variabili x, y ec. Ma si osservi che se x cresce mentre y scema, dovrà sostituirsi all'uno $x + \delta x$, all'altro $y - \delta y$; e se scemino ambedue nel tempo stesso, ad ambedue si sostituirà $x - \delta x, y - \delta y$ (821): noi supporremo che nel tempo stesso crescano ambedue. Voglia differenziarsi $xy = u$; avremo $u + \delta u = (x + \delta x)(y + \delta y) = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x \delta y = u'$, onde $u' - u = \delta u = x\delta y + y\delta x + \delta x \delta y$. Così si troverà $\delta(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ny + k) = (3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\delta x + (3ax + by + e)\delta x^2 + a\delta x^3 + (bx^2 + 2cxy + 3my^2 + fx + 2gy + n)\delta y + (cx + 3my + g)\delta y^2 + m\delta y^3 + (2bx + 2cy + f)\delta x \delta y + b\delta y \delta x^2 + c\delta x \delta y^2$. Così $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2 + y\delta y} = (273) \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} - \frac{(y^2\delta x \delta y - xy\delta y^2)}{y^4}$ ec.

834. In fine vogliasi la differenza *seconda*, *terza* ec. di x^n supposta δx costante (822): la prima differenza è $nx^{n-1}\delta x + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot$

$\frac{n-2}{3}x^{n-3}\delta x^3$ ec. (827), e tutto si ridurrà a trovar le differenze di x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} ec. Ora 1°. $\delta(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}\delta x + (n-1)\frac{n-2}{2}x^{n-3}\delta x^2 + (n-1)\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}x^{n-4}\delta x^3$ ec. che si moltiplicherà per $n\delta x$: 2°. $\delta(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-3}\delta x + (n-2)\frac{n-3}{2}x^{n-4}\delta x^2$ ec. che si moltiplicherà per $n \times \frac{n-1}{2}\delta x^2$: 3°. $\delta(x^{n-3}) = (n-3)x^{n-4}\delta x$ ec. che si moltiplicherà per $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\delta x^3$ ec. Fatte l'operazioni, la differenza seconda sarà $n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}7x^{n-4}\delta x^4$ ec., e col metodo stesso si avrà la terza, la quarta ec.: così essendo $\delta(x^2) = 2x\delta x + \delta x^2$, sarà $\delta^2(x^2) = 2\delta x^2$; ma non prendendo costante δx, si troverà $\delta^2(x^2) = 2\delta x^2 + (2x + 4\delta x + \delta^2 x)\delta^2 x$. Nella medesima ipotesi di δx costante, si troverà che la differenza seconda di xy (ricordandosi che δy diviene $\delta y + \delta^2 y$) è $2\delta x\delta y + x\delta^2 y + 2\delta x\delta^2 y$.

835. Riguardo alle funzioni $\varphi(x)$, $f(x,y)$ ec. (821), poichè la differenza di qualunque funzione di x, di y ec. è come si è visto finora, una nuova funzione di x, di y ec. moltiplicata per δx, per δy ec., avremo $\delta[\varphi(x)] = \delta x\,\varphi'(x)$, $\delta[f(x,y)] = \delta(x,y)f'(x,y)$ ec.; del pari $\delta^2[\varphi(x)] = \delta x^2\varphi''(x)$ presa δx costante ec.

Prime Regole de' due Calcoli.

836. Una grandezza variabile G ha per *limite* un'altra grandezza L quando G o sempre crescendo o sempre scemando può accostarsi al valor di L in-

definitamente o ad arbitrio, senza poter mai eguagliarlo di fatto (512): così se G accostandosi ad Ω giunga a differirne della quantità ω, sarà $G = \Omega - \omega$, e tanto più si avvicinerà G al valor di Ω quanto più scemerà ω; cosicchè se divenisse $\omega = 0$, si avrebbe realmente $G = \Omega$; in tal caso Ω si chiama il limite di G.

Onde 1°. *per avere il limite d' una grandezza, bisogna fare zero la differenza tra essa e la grandezza a cui sempre si accosta*: 2°. accostandosi G alle grandezze L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G = L - l$, e $G = \Lambda - \lambda$, onde $L - l = \Lambda - \lambda$, e fatto $l = 0$, $\lambda = 0$, saranno L, Λ due limiti di G, e verrà $L = \Lambda$, cioè *i limiti d' una stessa grandezza G sono eguali*: 3°. Se le grandezze G, Γ conservando tra loro la stessa invariabil ragione $m : n$, si accostino ad L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G = L - l$, $\Gamma = \Lambda - \lambda$, ed $L - l : \Lambda - \lambda :: m : n :: G : \Gamma$, cioè *se G, Γ si accostino proporzionalmente ai limiti L, Λ, le grandezze e i limiti staranno tra loro nella stessa ragione*: 4°. *una grandezza G continuamente accostandosi al limite L, può riguardarsi (se basti una certa approssimazione) come eguale ad L quando è giunta allo stato che o immediatamente precede l' eguaglianza perfetta o ne è anche un poco più remoto*, conseguenza che talvolta ha luogo nelle stesse Scienze Matematiche, come nella somma delle serie convergenti (291): e ne ha poi moltissimo in tutte le scienze fisiche: 5°. poichè la grandezza G si può tanto accostare al limite L da giungere a differirne inassegnabilmente, *ciò che si dimostra di G sarà dimostrato anche di L*.

837. Ora il *Calcolo differenziale* è il metodo di trovare i limiti della relazione tra le differenze delle quantità variabili: il metodo inverso che consiste nel risalire da questi limiti alla relazione stessa delle quantità, si chiama *Calcolo integrale*. Alcuni esempj renderanno chiare queste nozioni.

166. 838. Condotte nella curva AMm l' ordinate PM, pm, la corda mM prolungata in S, ed Mr parallela ad Ap, sia l' arco AM $= s$, M$m'm = \delta s$, AP $= x$, PM $= y$, Pp $=$ Mr $= \delta x$, $mr = \delta y$, onde Mm $= \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$: è chiaro che $\frac{\delta s}{\delta x} > \frac{\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}}{\delta x}$, e che quanto più m si accosta ad M, cioè quanto più scema δx, tanto meno differiranno tra loro quelle due ragioni; dunque la ragione $\frac{\delta s}{\delta x}$ è il limite dell' altra $\frac{\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}}{\delta x}$ (836). Similmente condotta ad M la tangente MT, i triangoli simili MPS, mrM danno $\frac{MP}{PS} = \frac{mr}{rM} = \frac{\delta y}{\delta x}$; e poichè $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$, sarà $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$, e quanto più m si accosta ad M, tanto meno differiranno tra loro le due ragioni $\frac{MP}{PT}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$; dunque l'una è il limite dell' altra, e per determinar la prima basta trovare una nuova espressione del limite della seconda: così se AMn è un circolo dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ (478), presa la differenza (827) $2y\delta y + \delta y^2 = 2a\delta x - 2x\delta x - \delta x^2$, sarà $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2a - 2x - \delta x}{2y + \delta y}$, ove quanto più scemano δx, δy, tanto più la ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ si accosta a quella di $\frac{2a - 2x}{2y} = \frac{a - x}{y}$; dunque $\frac{a-x}{y}$ è il limite di $\frac{\delta y}{\delta x}$, dunque (836) $\frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT} = \frac{a-x}{y}$, e però PT $= \frac{y^2}{a-x}$, come già si sapeva (478).

839. Per convincersi poi che δy, δx anche divenendo zero, serban tra loro una ragione, sia $\delta y = a^2 - x^2$, $\delta x = a - x$, e si supponga $x = a$: in tal

caso si avrà $\delta y = o$ e $\delta x = o$; eppure intanto $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + x = 2a$. Similmente se nel triangolo PBE sia PB $= a$, BE $= b$, e sull' ascissa BI $= x$ si conduca l' ordinata IG $= y$. parallela a BE, si avrà PB (a): BE (b) :: PI ($a - x$): IG (y), onde $ay = ab - bx$; e prese le differenze, osservando che l' una delle coordinate scema mentre l' altra cresce, sarà $\mp a\delta y = \mp b\delta x$, ovvero $a\delta y = b\delta x$, e però $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{b}{a}$, cioè le differenze $\delta y, \delta x$ anche annullandosi, come avviene in GI, conservan tra loro la ragion costante $b : a$ delle quantità primitive $y, a - x$ a cui appartengono. Tale è l' idea che bisogna farsi del calcolo differenziale.　　45.

840. Quanto all' integrale, egli è l' opposto del differenziale (837) ed ogni integrazione esige l' aggiunta d' una costante (825). Per dare anche di questo un' esempio, sia OD una linea retta o curva con due coordinate HC $= x$, CD $= y$ in angolo retto, e presa C$c = \delta x$, si conduca l' ordinata $cd = cr + rd = y + \delta y$; è chiaro (824) che lo spazio Cd sarà la differenza di qualunque spazio corrispondente HD, l' arco Dd di qualunque arco corrispondente OD, la superficie descritta da Dd della descritta da OD nella rivoluzion della figura sull' asse HC, il solido generato da Cd del solido generato da HD ec.; cosicchè sommate secondo il bisogno queste differenze, il calcolo integrale determinerà la quadratura degli spazj, la lunghezza delle linee e la dimensione delle superficie curve, la cubatura dei solidi ec.

841. Supposta dunque per ora OD una retta, sia PH $= a$ e la normale HO $= b$; avremo perciò $a : b :: a + x : y = \frac{b(a + x)}{a}$, onde differenziando, $\delta y = \frac{b\delta x}{a}$, e lo spazio differenziale Cd = Cr + Drd $= \delta x \times$

45 $y + \frac{\delta x \times \delta y}{2} = \frac{b}{a}(a\delta x + x\delta x + \frac{\delta x^2}{2})$; quindi per aver la quadratura di uno spazio corrispondente HD o PCD, bisogna integrar quest' ultima equazione: ma $\sigma a \delta x = ax$ e $\sigma(x\delta x + \frac{\delta x^2}{2}) = \frac{1}{2}x^2$ (827); dunque l'integrale completo con l'aggiunta della costante sarà $\sigma(Cd) = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) + C$. Ora come l'area del trapezio HD è diversa da quella del triangolo PCD, così la costante C avrà nei due casi un diverso valore: infatti il trapezio è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto H, cioè quando $x = 0$; ma il triangolo è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto P, cioè quando $x + a = 0$ ovvero $x = -a$; dunque supposti nulli i due spazj e sostituito nell' integrale il doppio valore di x, verrà 1°. $0 = 0 + C$, e però $C = 0$; 2°. $0 = -b(a - \frac{1}{2}a) + C$, e però $C = \frac{ab}{2}$; onde $\sigma(Cd) = HD = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}(b + y)$, come ben si sapeva (517) e $\sigma(Cd) = PCD = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) + \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}y(a + x)$, come pure si sapeva (515). Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo integrale.

842. Ciò supposto, si è convenuto di esprimere con $\frac{dy}{dx}$ il limite della relazione o ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ tra le differenze prime delle variabili y, x: con $\frac{d^2y}{d^2x}$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$ i limiti delle ragioni $\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x}$ o $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ tra le lor differenze seconde ec.; e i termini dy, dx del limite $\frac{dy}{dx}$ si son chiamati *differenziali del prim' ordine*, i termini d^2y, d^2x, dx^2 dei limiti $\frac{d^2y}{d^2x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *differenziali del second' ordine* ec.;

onde *differenziar le quantità* significa ora cercare il limite della ragione tra le lor differenze; e dicesi *quantità* ed *equazione differenziale* quella che nasce dalla *differenziazione*. All incontro il carattere o segno $\int$ posto avanti ad una differenziale, indica *somma* o *integrazione*. Del resto molti Geometri a cui piace di abbracciare sotto il comun nome di *Calcolo Infinitesimale* i due Calcoli di cui trattiamo, concepiscono una variabile aumentata o diminuita d' una quantità infinitamente piccola dy o dx, e chiamano dy, dx *infinitamente picculi* o *infinitesimi del prim' ordine*, d^2y, d^2x, dx^2 *infinitesimi del secondo* ec., riguardando intanto l' integrazione come il ritorno dagli infinitesimi ai finiti. Altri danno a dy, d^2y, d^3y ec. il nome di *flussioni del primo*, *secondo*, *terzo* ec. *ordine*, e chiamano *fluenti* le quantità che si ritrovano col calcolo integrale. Queste idee ed espressioni, benchè poco esatte, sono assai comuni, e noi non lasceremo di farne uso dopo aver derivate dai fondamenti già stabiliti le prime regole dei due calcoli, nelle quali supporremo tutte le variabili crescenti, giacchè in caso diverso si sa come bisogna condursi (833).

843. Abbiam veduto (836) che il limite d' una ragione si ottiene col fare zero la differenza tra essa e quella a cui sempre si accosta. Dunque 1°. per differenziar $b^2 + ax = u$, si avrà $\delta u = a\delta x$ (826), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = a$, ove non essendo differenza alcuna, sarà a il limite di $\frac{\delta u}{\delta x}$, e però anche $\frac{du}{dx} = a$, e $du = adx$. Quindi per differenziare $a^2 + bx + cy - fz = u$, sarà (826) $\frac{\delta u}{\delta x} = b + \frac{c\delta y}{\delta x} - \frac{f\delta z}{\delta x}$: ma $\frac{\delta u}{\delta x}$ divenendo $\frac{du}{dx}$, anche $\frac{\delta y}{\delta x}$ e $\frac{\delta z}{\delta x}$ debbon divenire $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$; dunque $\frac{du}{dx} = b + \frac{cdy}{dx} -$

$\frac{fdz}{dx}$, e però $du = bdx + cdy - fdz$, cioè *le variabili al primo grado si differenziano come nel calcolo delle differenze finite, sostituendo ad esse le lor differenziali e scancellando le costanti se vi sono*.

844. Dunque II°. per differenziare $x^n = u$, avremo prima $\delta u = nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2$ ec.(827), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = nx^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x$ ec., e poi fatta $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$ e $du = nx^{n-1}dx$ cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone l'esponente d'un'unità e moltiplicandola per il prodotto dell'esponente primitivo nella sua differenziale*; così $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ ec.

845. Da ciò si raccoglie che $d[\sqrt{(a+x)}] = d(a+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}}$, come può dedursi anche dalla dottrina dei limiti (829); $d[\sqrt{(ay+y^2)}] = d(ay+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+2y)dy}{2\sqrt{(ay+y^2)}}$, e in generale $d[\sqrt[m]{(ax+x^2)}] = \frac{(a+2x)dx}{m\sqrt[m]{(ax+x^2)^{m-1}}}$, cioè *si differenzia un radicale del grado* m *dividendo la differenziale della quantità sotto al segno per il prodotto dell'esponente* m *nella radice* m *di questa quantità alzata alla potenza* m — 1.

846. Dunque III°. per differenziare $xy = u$, si avrà prima $\delta u = x\delta y + y\delta x + \delta y\delta x$ (833), onde $\frac{\delta u - x\delta y}{\delta x} = y + \delta y$, e poi fatto $\delta y = 0$, verrà $\frac{du - xdy}{dx} = y$, e $du = xdy + ydx$, cioè *si differenzia un prodotto di variabili sommando i prodotti della differenziale di ciascuna*

ciascuna variabile per tutte l'altre: così $d(z\varphi\omega) = \varphi\omega dz + z\omega d\varphi + z\varphi d\omega$; $d(x^3y) = 3yx^2dx + x^3dy$, ec.

847. Dal che segue che volendo differenziare $\frac{x}{y} = u$, si avrà $x = uy$, $dx = \frac{xdy}{y} + ydu$ e $du = \ldots \frac{ydx - xdy}{y^2}$ (833) cioè *si differenzia un rotto prendendo il prodotto del denominatore per la differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per la differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore*: così $d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}$; $d\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = \frac{(2ax+x^2)dx}{(a+x)^2}$; $d\sqrt{\frac{a+x}{x}} = \frac{-adx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}}$, come risulta ancora dalla consueta dottrina dei limiti (828.829) ec.

848. Dunque IV. per differenziar $sen\, x$ e $cos\, x$, fatto nelle formule (830) δx infinitesimo, svanirà δx in confronto di x e $sen\, \delta x$ si confonderà con l' arco (629); dunque $d(sen\, x) = dx \cos x$, e $d(\cos x) = -dx\, sen\, x$, cioè *si differenzia il seno o coseno d' un arco moltiplicando la differenziale dell' arco positiva o negativa nel suo coseno o seno respettivamente*.

Parimente posto $sen\, x = u$, verrà prima (830) $\delta u = \delta x \times \cos x - \frac{\delta x^2\, sen\, x}{2}$ ec. onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos x - \frac{\delta x\, sen\, x}{2}$ ec. e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \cos x$ e $du = d(sen\, x) = dx \cos x$; e $d(\cos x) = -dx\, sen\, x$ (830). Così $d(sen^m x) = m\, sen^{m-1} x dx \cos x$; $d(sen\, mx) = mdx \cos mx$; $d(\cos mx) = -mdx\, sen\, mx$; $d(sen\, x \times \cos x) = dx \cos^2 x - dx\, sen^2 x = dx \cos 2x$ (621); $d\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}} = d(\cos \frac{1}{2} x)$ (622) $= -\frac{1}{2} dx\, sen\, \frac{1}{2} x$, $d[\sqrt{(a^2 - b\, sen\, x)}] = d(a^2 - b\, sen\, x)^{\frac{1}{2}} = \frac{-bdx \cos x}{2\sqrt{(a^2 - b\, sen\, x)}}$ ec.: e si osservi che se il raggio non fosse 1 ma a, avrebbe sempre luogo la regola data altrove (609).

849. Dal che si ha 1°. $d(tang\,x) = d\frac{sen\,x}{cos\,x} = (847)$ $\frac{dx\,cos^2 x + dx\,sen^2 x}{cos^2 x} = (610)\,\frac{dx}{cos^2 x}$: 2°. $d(cot\,x) = d\,\frac{1}{tang\,x} = \frac{-dx}{cos^2 x \,.\, tang^2 x} = (610)\,\frac{-dx}{sen^2 x}$: 3°. $d(sec\,x) = d\left(\frac{1}{cos\,x}\right) = \ldots$ $\frac{dx\,tang\,x}{cos\,x}$: 4°. $d(cosec\,x) = d\left(\frac{1}{sen\,x}\right) = \frac{-dx\,cot\,x}{sen\,x}$: 5°. $d(sen.v.x) = d(1 - cos\,x) = dx\,sen\,x$: 6°. $d(cos\,v.\,x) = d(1 - sen\,x) = -dx\,cos\,x$.

850. Onde se x è un arco qualunque e p il suo seno o coseno o tangente ec., sarà 1°. $dx = d($ *arco il cui seno è* $p) = \frac{d(sen\,x)}{cos\,x} = \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 2°. $dx = d(arc.\,cos\,p) = \ldots$ $\frac{-d(cos\,x)}{sen\,x} = \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 3°. $dx = d(arc.\,tang\,p) = cos^2 x.$ $d(tang\,x) = \frac{d(tang\,x)}{1 + tang^2 x} = \frac{dp}{1+p^2}$: 4°. $dx = d(arc.\,cot\,p) = -$ $sen^2 x\,.\,d(cot\,x) = \frac{-d(cot\,x)}{1 + cot^2 x} = \frac{-dp}{1+p^2}$: 5°. $dx = d(arc.\,sec\,p) =$ $\frac{cos\,x\,.\,d(sec\,x)}{tang\,x} = \frac{d(sec\,x)}{sec\,x\sqrt{(sec^2 x - 1)}} = \frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 6°. $dx =$ $d(arc.\,cosec\,p) = \frac{-sen\,x\,.\,d(cosec\,x)}{cot\,x} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{-d(cosec\,x)}{cosec\,x\sqrt{(cosec^2 x - 1)}} = \frac{-dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 7°. $dx = d(arc.\,sen\,v.\,p) =$ $\frac{d(sen\,v.\,x)}{sen\,x} = \frac{dp}{\sqrt{(2p - p^2)}}$: 8°. $dx = d(arc.\,cos\,v.\,p) = \ldots$ $\frac{-d(cos\,v.\,x)}{cos\,x} = \frac{-dp}{\sqrt{(2p - p^2)}}$.

851. Dunque V°. per differenziare $lx = u$, si avrà prima (831) $\delta u = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\delta x}{2x^2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, e $du = d(lx) = \frac{dx}{x}$, cioè *si differenzia il logaritmo d' una variabile dividendo per essa la*

sua differenziale; e poichè si ha $dx = xd(lx)$, è chiaro che *la differenziale d' una quantità* x *è il prodotto di essa nella differenziale del suo logaritmo*, il che dà un nuovo metodo di differenziare. Si noti ancora che per un sistema del modulo m, si avrebbe $d(lx) = \frac{mdx}{x}$; ma noi parleremo dei soli logaritmi naturali il cui modulo è 1: così $d(lx^n) = d(nlx) = \frac{ndx}{x}$; $d(lxy) = \frac{ydx + xdy}{xy}$; $d\left(l\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$; $d[l(a^2 - x^2)] = \frac{-2xdx}{a^2 - x^2}$; $d\left(l\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2adx}{a^2 - x^2}$; $d[l\sqrt[m]{(a + bx^n)^r}] = \frac{r}{m}d[l(a + bx^n)] = \frac{bnrx^{n-1}dx}{m(a + bx^n)}$; $d\left(l\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right) = (847)\frac{dx}{x(1+x^2)}$; $d(\cos lx) = (848) - dlx \,\text{sen}\, lx = -\frac{dx}{x}\text{sen}\, lx$ ec. Del pari volendo differenziar potenze di logaritmi, si troverebbe $d(l^m x) = (846)\, ml^{m-1}x.\frac{dx}{x}$; $d(x^m l^n x) = (844)\, mx^{m-1}dx\, l^n x + nx^{m-1}dx\, l^{n-1}x = x^{m-1}dx\, l^{n-1}x \times (n + mlx)$: e per differenziare un logaritmo di logaritmo come $l'x = u$, si farà $lx = t$ e sarà $llx = lt = u$, onde $dx = \frac{dt}{t} = \frac{d(lx)}{lx} = \frac{dx}{xlx}$.

852. Dunque VI°. per differenziare $a^{mx} = u$, si avrà prima (832) $\delta u = ma^{mx}\delta xla + \frac{m^2a^{mx}\delta x^2l^2a}{2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = ma^{mx}la + \frac{m^2a^{mx}\delta xl^2a}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = ma^{mx}la$ e $du = ma^{mx}dxla$: onde se sia $1 = l2,7182818\,(308) = le$, cioè se si chiami e il numero il cui logaritmo naturale è 1, sarà $d(e^x) = e^x dxle = e^x dx$; $d(e^{-mx}) = -me^{-mx}dx$; e $d(e^{lx}) = dx\,(308)$. Del pari $d(x^y) = (851)\, x^y d(ylx) = x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$: e per differenziare *gli esponenziali di se-*

cond' ordine, come $x^{y^z} = u$, si farà $y^z = t$ e sarà $x^{y^z} = x^t = u$, onde $x^t d(tlx) = x^{y^z} d(y^z lx) = x^{y^z} \left[y^z \left(dzlylx + \frac{zdylx}{y} \right) + \frac{y^z dx}{x} \right] = x^{y^z} y^z \left(dzlxly + \frac{zdylx}{y} + \frac{dx}{x} \right)$; se $x = y = e$, sarà $d(e^{e^z}) = e^{e^z} e^z dz$.

853 Dunque VII°. la differenziale prima delle funzioni $\varphi(x)$, $f(x, y)$, $F(ay + x^2)$ ec. sarà $dx\varphi'(x)$, $d(x, y)f'(x, y)$, $(ady + 2xdx)F'(ay + x^2)$, ec.: e la seconda, prendendo costante dx, sarà $dx^2\varphi''(x)$ ec. (835).

854. Dunque VIII°. per differenziar la seconda volta $x^n = u$, o per trovarne, presa dx costante, la differenziale seconda, si avrà primieramente (834) $\delta^2 u = n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3$ ec. onde $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{d^2 u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ e $d^2 u = n(n-1)x^{n-2}dx^2$: così $d^2(x^2) = 2dx^2$; $d^2(x^3) = 6xdx^2$ ec. Ma se dx non sia costante, siccome $d(x^2) = 2xdx$ (844) avremo $d^2(x^2) = d(2xdx) =$ (846) $2dx^2 + 2xd^2x$: in generale, poichè $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, sarà $d^2(x^n) = d(nx^{n-1}dx) = n(n-1)x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x$. Similmente essendo $d(xy) = xdy + ydx$, sarà $d^2(xy) = xd^2y + 2dxdy + yd^2x$; $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = dx + \frac{yd^2x}{dy} - \frac{ydxd^2y}{dy^2}$; e in generale, supposto $Y = ax^m y^n + bx^p y^q +$ ec., $dY = Pdx + Qdy = (amy^n x^{m-1} + bpy^q x^{p-1} +$ ec.$)dx + (anx^m y^{n-1} + bqx^p y^{q-1} +$ ec.$)dy$, onde $P = amy^n x^{m-1} + \ldots bpy^q x^{p-1} +$ ec., e $Q = anx^m y^{n-1} + bqx^p y^{q-1} +$

ec., sarà $dP = [am(m-1)y^n x^{m-2} + bp(p-1)y^q x^{p-2} + \text{ec.}]dx + (amnx^{m-1}y^{n-1} + bpqx^{p-1} \times y^{q-1} + \text{ec.})dy$, e $dQ = (anmy^{n-1}x^{m-1} + bpqy^{q-1} \times x^{p-1} + \text{ec.})dx + [an(n-1)x^m y^{n-2} + bq(q-1)x^p y^{q-2} + \text{ec.}]dy$; d' onde è facile di avere il valor di $d^2Y = dPdx + Pd^2x + dQdy + Qd^2y$, e si vede frattanto che il coefficiente di dy in dP è sempre lo stesso del coefficiente di dx in dQ. Prendendo costante dx o dy, vanno a zero i termini ove è d^2x o d^2y: e col metodo istesso si hanno le differenziali terze ec.

855. Da quanto si è detto facilmente si comprenderanno le prime regole del calcolo integrale: così $\int adx = ax + C$ (843); $\int nx^{n-1}dx = x^n + C$ (844), e quindi $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C$; dunque fatto $n-1 = m$, sarà $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, cioè *si integra una differenziale monomia accrescendo d' un' unità l' esponente della variabile, e dividendola per la sua differenziale moltiplicata nell' esponente accresciuto*: così $\int \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}} = \int \frac{dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{dx(a+x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}dx} = \sqrt{(a+x)} + C$ (845) ec.

856. Nel caso però di $m = -1$ la regola non ha luogo, ma allora $x^m dx = x^{-1}dx = \frac{dx}{x}$, e si sa che $\int \frac{dx}{x} = lx + C$ (851): ciò si avverta per sempre.

857. Talora si integra più facilmente per mezzo d' una sostituzione: così volendo $a\int x^{n-1}dx$ (b +

$x^n)^m$, fatto $b+x^n=z$ e però $nx^{n-1}\,dx=dz$ ed, $x^{n-1}dx=\frac{dz}{n}$, verrà $a\int\frac{z^m dz}{n}=\frac{az^{m+1}}{n(m+1)}=\ldots\ldots$ $\frac{a(b+x^n)^{m+1}}{n(m+1)}+C$ ec. Bisogna però preparar, se occorra, tali sostituzioni: così $dx\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$ e $(3ax^3+4x^4)dx\sqrt{(ax+x^2)}$ si ridurranno prima a $xdx\sqrt{(a^2+x^2)}$ e a $(3ax^2+4x^3)dx\sqrt{(ax^3+x^4)}$, e poi fatto $\sqrt{(a^2+x^2)}=z$ e $\sqrt{(ax^3+x^4)}=z$, si integrerà facilmente.

858. In generale $\int x^n dx(a+bx^m)^r$ può aversi in' tre casi: I°. se r è numero intero e positivo; poichè sviluppando la differenziale e integrandone ciascun termine, si ha $\int(a^r x^n dx+ra^{r-1}bx^{m+n}dx+\text{ec.})=C+\frac{a^r x^{n+1}}{n+1}+\frac{ra^{r-1}bx^{m+n+1}}{m+n+1}+$ ec., espressione finita nel nostro caso (156). II°. se $n=m(c+1)-1$, essendo c zero o intero; poichè fatto $a+bx^m=z$, $x^m=\frac{z-a}{b}$, $x^{m-1}dx=\frac{dz}{mb}$, $x^{mc+m-1}dx=\frac{(z-a)^c dz}{mb^{c+1}}$, verrà $\int x^n dx(a+bx^m)^r=\frac{1}{mb^{c+1}}\int z^r dz(z-a)^c$, che sviluppato s' integrerà (I°.). III°. se $n=-m(c+r)-1$, cioè $n+mr=-mc-1$, essendo c intero; poichè $x^n dx(a+bx^m)^r=x^n x^{mr}dx\left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r=x^{n+mr}\times dx(b+ax^{-m})^r$, e fatto $b+ax^{-m}=z$, $x^{-m}=\frac{z-b}{a}$, $x^{-m-1}dx=-\frac{dz}{ma}$, $x^{-1}dx=\frac{dz}{-m(z-b)}$, verrà

$\int x^{n+mr} dx (b + ax^{-m})^r = \frac{-1}{ma^c} \int z^r dz (z - b)^{c-1}$: così $\int x^{-2} dx (a + x^3)^{-\frac{5}{3}}$ dà $n = -2$, $b = 1$, $m = 3$, $r = \frac{-5}{3}$, $n + mr = -7 = -3c - 1$, onde $c = 2$; quindi $\frac{-1}{3a^2} \int (z^{-\frac{2}{3}} dz - z^{-\frac{5}{3}} dz) = \frac{2z + 1}{-2a^2 z^{\frac{3}{2}}} = \ldots\ldots$

$$\frac{3x^3 + 2a}{-2a^2 x \sqrt[3]{(a + x^3)^2}}.$$

859. Infine è manifesto che $\int dx \cos x = \operatorname{sen} x + C$; $\int dx \operatorname{sen} x = -\cos x + C$ (848) ec.

860. Egualmente $\int \frac{dp}{\sqrt{(1 - p^2)}} = \operatorname{arc.sen} p + C$ (850) ec., $\int \frac{dx l^n x}{x} = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C$; $\int \frac{dx}{x l x} = llx + C$; $\int \frac{dx}{x lx llx} = lllx + C$ (851) ec.; come pure $\int a^x dx la = a^x + C$; $\int x^y (dylx + \ldots \frac{ydx}{x}) = x^y + C$ (852) ec.; e parimente $\int dx \varphi'(x) = \varphi(x)$; $\int d(x, y) f'(x, y) = f(x, y)$ ec. (853). Tra poco daremo altre regole del calcolo integrale.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Tangenti.

861. Dei problemi da sciogliersi sopra una curva, il più semplice è di condurre una tangente a un punto della medesima. Ora abbiamo già trovato che se sia AP $= x$, 167.

167. PM $= y$, AM $= s$, le ragioni $\frac{y}{PT}$ e $\frac{ds}{dx}$ sono i limiti di $\frac{\delta y}{\delta x}$ e di $\frac{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}}{\delta x}$ (838); dunque $\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$ (842), e la *suttangente* PT $= \frac{ydx}{dy}$; l' elemento della curva AMm o l' *arco infinitesimo* Mm $= \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; la *tangente* MT $= \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{yds}{dy} = t$; la *sunnormale* PN $= \frac{PM^2}{PT} = \frac{ydy}{dx}$; la *normale* MN $= \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{yds}{dx} = n$; e se per A si conduca AQ parallela a MP, si avrà $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx}{dy} - x\,(= AT) :: y : AQ = y - \frac{xdy}{dx}$. Con ciò si trovano i valori di queste varie linee in ciascuna curva, ricavando dalla sua equazion differenziata il valor di ciascuna formula differenziale, e per avere gli *asintoti* facendo x infinita in AT, AQ. Ecco gli esempj.

862. I. L' equazione al circolo è $y^2 = a^2 - x^2$; dunque $ydy = -xdx$, e $\frac{ydx}{dy} = -\frac{y^2}{x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x} =$ PT (il segno $-$ indica che la suttangente dev' esser presa nel senso stesso dell' ascissa, perchè nella costruzion della formula si è presa in senso contrario, e dall' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si è avuto un risultato positivo (838)): la sunnormale $\frac{ydy}{dx} = -x$; la normale $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})} = \sqrt{(y^2 + x^2)} = a =$ al raggio, come dev' essere; l' arco M$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{y} = -\frac{ady}{x}$.

II. Nella parabola, $y^2 = px$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$, e $\frac{ydx}{dy} = 2x$.

III. Nell' ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; dunque $ydy = \frac{b^2}{a^2}(-xdx)$, $\frac{ydy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2}$, ed $\frac{ydx}{dy} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

IV.

IV. Nell' iperbola, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a+x)$, e $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax+xx}{a+x}$. Si ha ancora $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ax}{a+x}$, espressione $= a$ quando x è infinita; come $AQ = y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{b^2x}{a^2y}(a+x) = \frac{b^2x}{ay} = \sqrt{\frac{b^2x}{2a+x}}$, si riduce a $\pm b$. Questi valori di AT, AQ danno gli asintoti (772). 167.

V. Nella logaritmica, $x = A\,logy$ (788) e $dx = \frac{Ady}{y}$, onde $\frac{ydx}{dy} = A$, e però *la suttangente eguaglia il modulo.*

863. VI. Sia $y^m = x^n a^{m-n}$; si avrà $nlx + (m-n)la = mly$, onde (851) $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, e la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{mx}{n}$. Tutte le curve rappresentate dall' equazion generale $y^m = x^n \times a^{m-n}$ si chiaman parabole quando m, n son positive: se $m=2, n=1$, si ha $y^2 = ax$, equazione alla parabola ordinaria; se $m=3, n=1$, si ha $y^3 = a^2x$, equazione alla *prima parabola cubica*; se $m=3, n=2$, si ha $y^3 = ax^2$, equazione alla *seconda parabola cubica* ec. Che se n è negativa, le parabole divengono iperbole la cui equazione è $y^m = x^{-n} a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, cioè $x^n y^m = a^{m+n}$; onde la suttangente di queste curve è in generale $-\frac{mx}{n}$, cioè dee prendersi nel senso stesso delle x. Se $m=n=1$, si ha l'iperbola ordinaria la cui suttangente $= -x$ (776).

VII. Nella quadratrice, prese l' ascisse dal centro e condotte mp infinitamente vicina ad MP, ed mr, BV parallele ad MO, si ha $mr\,(dx) : rM\,(-dy) :: MO\,(x) : OT = -\frac{xdy}{dx}$; e poichè (793) $y = x \cot cx$ e $dy = dx \cot cx - \dots \frac{cxdx}{sen^2 cx}$, viene $y + OT = CT = \frac{cx^2}{sen^2 cx}$: ora VB $(sen\, cx)$: 142.

142. BC(1) :: OM(x) : MG $= \frac{x}{sen\,cx}$; dunque CT $= c$. CM^2 $=$ $\frac{CM^2}{CD}$ (793).

138. VIII. Sia la curva aQ a doppia curvatura: poichè in essa x è s, ed y è z (802), $\frac{ydx}{dy}$ diverrà $\frac{zds}{dz} = \frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2 = px, z^2 = qy$, verrà $z = \sqrt[4]{pq^2x}$ (802), $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}, dz = \frac{qdy}{2\sqrt{qy}} = \frac{pqdx}{4\sqrt[4]{p^3q^2x^3}}, \frac{z}{dz} = \frac{4x}{dx}$ e $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}$; dunque la suttangente $\frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 4x\sqrt{\frac{4x+p}{4x}} = 2\sqrt{(4x^2+px)}$.

141. 864. Siano due curve BIOC, BMA tali che prolungando l' ordinate OP della prima fino alla seconda, la retta MO sia una funzione qualunque dell' arco BIO, e debba condursi la tangente MT. Immagino l' ordinata mp infinitamente vicina, ad MP, ed Mr parallela alla tangente TO: fatto BIO $= z$, MO $= u$, sarà (842) $mr = du$, rM $=$ O$o = dz$, e $du : dz :: u :$ OT $= \frac{udz}{du}$, che determina il punto T.

Sia per esempio $u = \frac{bz}{a}$, sarà $du = \frac{bdz}{a}$, ed OT $= \frac{udz}{du} = z =$ BIO. Se BIOC è un arco di circolo, AMB è una cicloide, che se sia ordinaria, ha una costruzione più semplice; poichè essendo MO $=$ BIO $=$ OT, si ha l' angolo TOP $=$ 2BOP (418. 419) $=$ 2TMO (425), onde BOP $=$ TMO, ed MT parallela alla corda OB, è tangente in M.

143. 865. Con un raggio CA descritto un circolo, sia una curva CKM tale che condotto il raggio CMN, la linea CM sia una funzione dell' arco ADBN; condurre una tangente MT al dato punto M. Immagino due raggi infinitamente vicini CMN, Cmn, e il piccolo arco Mr descritto dal centro C col raggio CM, e conduco CT perpendicolare a CM. Sia ora CM $= y$, ADBN $= x$, CA $= a$, e si avrà $a : y ::$ Nn (dx) : Mr $= \frac{ydx}{a}$, ed rm (dy) : $\frac{ydx}{a} :: y :$ CT $=$ . .

$\frac{y^2 dx}{a dy}$. Sia per esempio $y = \frac{ax}{\pi}$, la curva CKM sarà la spirale d' Archimede, e si avrà $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{a}$, $CT = \frac{y^2\pi}{a^2} = \frac{xy}{a} =$ OEQM.   143.

Sia la spirale iperbolica, in cui $xy = ab$; si avrà $xdy + ydx = 0$, $ydx = -xdy$, $CT = -\frac{xydy}{ady} = -\frac{xy}{a} = -b$.   145.

866. Nella spirale logaritmica, ove l' angolo CMT è costante, immagino i raggi infinitamente vicini CM, Cm, e descritto dal centro C con un raggio CN un circolo, faccio $CM = y$, $CN = a$, e segnato sulla circonferenza del circolo un punto fisso A, suppongo l' ascissa $AN = x$, il che mi dà $a : dx :: y : Mr = \frac{ydx}{a}$. Sia $tang\, Mmr = t = \frac{sen\, Mmr}{cos\, Mmr} = \frac{Mr}{mr} = \frac{ydx}{ady}$ onde $\frac{dx}{at} = \frac{dy}{y} = d(ly)$ (851): dunque $ly = \frac{x}{at} +$ C. Ora quest' equazione fa vedere 1°. che la spirale fa un' infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene quanto per allontanarsene; poichè in luogo di x può sostituirsi successivamente $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 3\pi$ ec., $-\pi + x$, $-2\pi + x$ ec., essendo π la circonferenza ANB: 2°. che facendo $C = lC'$, si avrà $l\frac{y}{C'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at} le$ (852) ovvero $\frac{y}{C'} = e^{\frac{x}{at}}$ ed $y = C' e^{\frac{x}{at}}$; dunque nel punto A ove $x = 0$, si ha $CD = y = C'$: 3°. che l' ascisse AN crescendo in progressione aritmetica $x, 2x, 3x$ ec., l' ordinate formano la progressione geometrica $C' e^{\frac{x}{at}}$, $C' e^{\frac{2x}{at}}$, $C' e^{\frac{3x}{at}}$ ec.: 4°. che se $t = \infty$, si ha $y = C'$, proprietà del circolo che taglia ad angoli retti tutti i suoi raggi come si sa.   146.

Evolute:

867. Se un filo ABC applicato sopra una curva BC, nella cui origine B è la tangente AB, si sviluppi tenendolo sempre egualmente teso, la sua estremità A descriverà una   168.

168. curva AM in cui 1°. MC sarà eguale ad AB + l'arco BC: 2°. l'arco infinitesimo Mm potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto dal centro C col raggio CM: 3°. onde nel punto C si riuniranno le due normali infinitamente vicine MN, mn: e 4°. la tangente MC della curva BC sarà sempre normale alla curva AM. Ora la curva BC dicesi l'*Evoluta* della curva AM, ed MC è il *Raggio Osculatore* o *di Curvatura*, che si tratta di determinare, supposta nota la curva AM.

868. Sieno MP, mp due perpendicolari all' asse AQ infinitamente vicine, e CO, Mr parallele allo stesso asse: fatta $MO = u$, $AP = x$, $PM = y$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, e $dxddx + dyddy = dsdds$, sarà (435) $dx : ds :: u : MC = \frac{uds}{dx}$: ma mentre AP, PM, MO variano, MC non varia (867); dunque differenziando $MC = \frac{uds}{dx}$, verrà $0 = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{(udds + dsdu)\,dx - udsddx}{dx^2}$; e poichà $du = mr = dy$, si troverà $u = \frac{dsdxdy}{dsddx - dxdds}$ onde $MC = \frac{ds^2 dy}{dsddx - dxdds} = \ldots$ $\frac{ds^3 dy}{ds^2 ddx - dx(dxddx + dyddy)} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} = \ldots\ldots$ $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Supposta costante ds, si ha $MC = \frac{dsdy}{ddx} = \ldots$ $\frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$: supposta costante dy, si ha $MC = \ldots$ $\frac{ds^3}{dyddx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$; ma supposta, come si fa d' ordinario, costante dx, viene $MC = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, cioè dividendo tutto per dx^3, $MC = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{-ddy}{dx^2}$.

869. Per sapere in qual punto abbia una curva AM la massima curvatura, si cerca il *minimo* raggio dell' evoluta, giacchè le curvature dei circoli sono in ragione inversa dei

raggi (509). Inoltre se la tangente in A è normale all'asse, si determina la retta BA o la distanza del vertice A dall'origine B dell'evoluta con fare $x = 0$ nell' espressione del raggio MC. Finalmente per trovar l' equazione dell' evoluta, conduco CQ perpendicolare all' asse, e se AB $= a$, BQ $= t$, CQ $= z$, ho primieramente, presa dx costante, MO $=$ $u = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ (368) e $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$; poi M$r$ (dx) : rm (dy) :: MO : CO $=$ PQ $= \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$, ed AP $+$ PQ $-$ AB $= t = x - a + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$: valori che coll' equazion della curva AM danno l' equazion dell' evoluta.

870. Fin quì le ordinate eran parallele fra loro. Se partono da un punto medesimo, immagino le infinitamente vicine BM, Bm, e le CO, Co perpendicolari ad esse: quindi descritto col centro B l' arco Mr, sia BM $= y$, M$r = dx$, $mr = dy$, M$m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, MO $= u$; per i triangoli simili Mrm, CMO (435), si ha $dx : u :: dy :$ CO $\left(= \frac{udy}{dx}\right) :: ds :$ MC $= \frac{uds}{dx}$. Differenziando, presa dx costante, si avrà d(MC) $=$ 0 (868) e $du = -\frac{udds}{ds}$; di più OQ $= -d$(CO) (833) $=$

$$\frac{-dudy - uddy}{dx} = \frac{-uddy}{dx} + \frac{udydds}{dxds} = -\frac{udxddy}{ds^2} \text{ (868), e}$$

BM (y) : Mr (dx) :: BO ($y - u$) : $\frac{-udxddy}{ds^2}$; onde $u = \ldots$

$\frac{yds^2}{ds^2 - yddy}$, ed MC $= \frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy} = y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2},$$

che si riduce a $\frac{ds^3}{-dxddy}$ quando $y = \infty$ (poichè allora ds^2dx diventa 0) cioè quando l' ordinate son parallele, come già abbiamo trovato. E se nei valori di CO, MC non si fosse

169.

169. presa dx costante, si sarebbe avuto MC = ...

$\frac{yds^3}{ds^2dx - yddy + ydydx}$. Ecco alcuni esempj.

871. Sia l' equazion generale alle sezioni coniche $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$ (745). Differenziando due volte, presa dx costante, si ha $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$ e $2yddy + 2dy^2 = \pm \frac{pdx^2}{a}$, onde $dy = \frac{pdx(a \pm x)}{2ay}$, e $ddy = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$, sostituiti i valori di dy e poi di y^2; dunque MC $\left(= \frac{ds^3}{-dxddy}\right) = \frac{4y^3ds^3}{p^2dx^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{\left(dx^2 + \frac{p^2dx^2(a\pm x)^2}{4a^2y^2}\right)^3} = \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{(4a^2y^2 + p^2(a \pm x)^2)^3} = (861)\frac{4n^3}{p^2} = (751 \cdot 739.)\frac{pz^3}{2q^3}$ in tutte le sezioni coniche.

872. Poichè in queste la tangente nel vertice è normale all' asse, se in MC si faccia $x = 0$ e perciò in forza dell' equazion generale, $y = 0$, sarà AB $= \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{p^6a^6} = \frac{p}{2}$ (862).

Nel circolo ove $p = 2a = 2n$ (410), si ha MC $= n = \frac{p}{2} = a =$ AB; onde i raggi osculatori son tutti eguali al raggio del circolo che ha dunque per evoluta il suo centro.

170. Nell' ellisse l' evoluta ha quattro rami BD, Db, bd, dB eguali, con quattro punti d' inflessione. Se in MC si faccia $x = a$, verrà ED $= \frac{a}{p}\sqrt{2ap}$, metà del parametro dell' asse minore (755).

171. Nella parabola, poichè MN^2 = TN×PN (473) e PN $= \frac{p}{2}$ (751), sarà il raggio MC $\left(= \frac{4MN^3}{p^2}\right)$ = NT×$\frac{MN}{PN}$ ed MN : NP :: MC : NT = CO = PQ $= 2x + \frac{p}{2}$ (862.II); dunque QN $= 2x$, AQ $= 3x + \frac{p}{2} = 3x +$ AB, onde BQ $= 3x$, il che dà una costruzione assai semplice per determinare il centro C

FIG. 171.

del circolo osculatore. Prendete $BQ = 3AP$, e condotta CQ perpendicolare ad AQ, il punto di concorso C delle due MC, CQ sarà il centro cercato.

Per trovar l' equazione dell' evoluta, sia $BQ\ (=3x) = t, CQ = z$, si avrà $NP\left(\frac{p}{2}\right) : PM\ (y) :: NQ\ (2x) : QC = z = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ onde $\frac{pz^2}{16} = x^3 = \frac{t^3}{27}$, e $t^3 = \frac{27pz^2}{16}$; cioè *l'evoluta della parabola ordinaria è una seconda parabola cubica il cui parametro è* $\frac{27}{16}$ *di quello della data*. Ora nell'evolute, $AB + BC = MC$ (867); dunque $BC = MC - \frac{p}{2} = \frac{4MN^3}{p^2} - \frac{p}{2}$: ma $MN = \sqrt{(px + \frac{p^2}{4})}$ (751) $= \frac{p}{2}\sqrt{(\frac{4x}{p} + 1)}$; dunque facendo $\frac{27}{16}p = a$ e perciò $MN = \frac{8a}{27}\sqrt{(\frac{9t}{4a} + 1)}$, si ha $BC = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9t}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$, espressione d' un arco qualunque della seconda parabola cubica la cui equazione è $t^3 = az^2$.

873. Sia la cicloide ordinaria $AMBa$ col circolo genitore BOD del diametro $BD = 2a$, con l' ordinata $MP = y$ e con l' ascissa $PB = x$: si avrà $mq\ (dy) : qM\ (dx) :: OP\ (\sqrt{(2ax - x^2)}) : PB\ (x)$; dunque $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazion differenziale della cicloide: e se si faccia piuttosto $AF = x$, $FM = DP = y$ onde $PB = 2a - y$, verrà $dx : dy :: \sqrt{(2ay - y^2)} : 2a - y$, e però $dy = dx\sqrt{\frac{2a - y}{y}}$, altra equazion differenziale della cicloide. Stando alla prima e posta dx costante, avremo differenziando, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$.

FIG. 172.

Dunque $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2OD$: ora MNC è parallela a OD poichè (864) la tangente MT è parallela a OB; dunque $OD = MN = NC$; quindi 1°. nel pun-

172. to A si ha $x=2a$ ed $MC=o$, onde il raggio osculatore in A è zero, e perciò l' evoluta passa per A: 2°. nel punto B si ha $x=o$ ed $MC=BE=4a=2BD$.

874. Per determinar l' evoluta ACE, compito il rettangolo AE, sul lato $AB'=DE=BD$ come diametro si descriva un semicircolo AQB', si conduca AQ parallela a CM e si unisca C e Q; posto ciò, l' angolo $NAQ=NDO$; dunque $OD=AQ$ (418.3.6) e l' arco OID (o la retta AN) = all' arco ALQ. Ora $OD=CN$; dunque $CN=AQ$, e però $CQ=AN$ (442) = all' arco ALQ, proprietà distintiva della cicloide ordinaria; onde l' evoluta ACE è una semicicloide eguale ad AMB. Si sarebbe trovato lo stesso cercando direttamente l' equazione dell' evoluta come abbiamo spiegato (862).

L' arco $AC=MC=2AQ$; dunque *un arco qualunque di cicloide è doppio della corda corrispondente del circolo genitore*. Così $MB=2OB$, $AMB=2BD$, e la cicloide intera ABa è quadrupla del diametro BD.

173. 875. Sia la spirale logaritmica ADM in cui $t=\frac{ydx}{ady}$ (866) ovvero $dy=\frac{dx}{t}$, fatto y il raggio arbitrario a: differenziando, supposta dx costante, si avrà $ddy=o$, e il raggio osculatore $MC=\frac{yds}{dx}$ (870); onde condotte AC, MC normali ad MA e alla tangente in M, il loro punto d' incontro C sarà all' evoluta: perchè Mr (dx):Mm (ds)::AM (y):MC.

876. L' angolo $ACM=AMT$ (473); onde l' evoluta ABC è la medesima spirale logaritmica ADM. Quindi (867) la tangente MC è eguale alla spirale ABC, benchè questa faccia un' infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT = all' arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime*.

Massimi e Minimi, e Punti d' Inflessione.

175. 877. L' ordinata MP d' una curva BM essendo maggiore o minore di quelle che la precedono $(p'm)$ e la seguono (pm), si chiama *Massima* o *Minima*, e il *Metodo dei massimi e dei minimi* insegna a determinar queste quantità.

878. Se

FIG. 175.

878. Se CM è il raggio del circolo osculatore nel punto M, l'ordinata MP sarà maggiore o minore di ogn' altra ordinata corrispondente a qualche punto dell' arco KMD descritto col raggio CM; onde MP (prolungata nel caso del *minimo*) passa per il centro del circolo osculatore; e però la tangente in M è parallela all' asse AP, e quindi la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \infty$; dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\infty} = o$. Può anche succedere che l'ordinata PM sia un massimo o un minimo quando la tangente in M è normale all' asse; allora $\frac{ydx}{dy} = o$ e però $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{o} = \infty$. Ora y può riguardarsi come una funzione dell' ascissa $AP = x$; e però per sapere in qual caso ella diventa un massimo o un minimo, si differenzierà l' equazione tra y ed x, e si eguaglierà a zero o all' infinito il rotto $\frac{dy}{dx}$; l' equazione che ne risulterà, combinata con la prima, darà dei valori di y, x i quali se non sieno assurdi, determineranno il massimo o il minimo.

177.

175.

879. Ma per distinguer l' uno dall' altro, sia $AP = x$, $PM = y$, $Pp = ndx = a$, $Pp' = -ndx = -a$; dunque (823) $pm = Y = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} +$ ec., e $p'm' = Y' = y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} -$ ec. Supposta dunque $\frac{dy}{dx} = o$ (878), svaniranno tutti i termini delle due serie dopo il terzo (197) e verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^2d^2y}{2dx^2}$: parimente se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = o = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^4d^4y}{2.3.4dx^4}$: se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = o = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^5y}{dx^5}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^6d^6y}{2.3.4.5.6dx^6}$, ec. ec. onde secondochè $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^6y}{dx^6}$ ec. sarà positiva o negativa, ambedue l' ordinate contigue pm, $p'm'$ supereranno o saranno superate da $PM = y$, che perciò nell' un caso sarà un minimo, nell' altro un massimo (877). In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec. *che vanno a zero, il*

175. *seguente se è negativo dà un massimo, se è positivo dà un minimo*. All' incontro se con $\frac{d^2y}{dx} = 0$ resti $\frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = y + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$, cioè $pm > PM$ e $p'm' < PM$, onde PM non sarà nè massimo nè minimo (877) ec. Ecco gli esempj.

I°. Dividere una retta $2a$ in due parti il cui rettangolo sia un massimo o un minimo. Chiamata x una parte, l'altra $2a - x$, l'espression del massimo o del minimo sarà $2ax - x^2$. Sia dunque $y = 2ax - x^2$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x = 0$, e però $x = a$. Per saper se la soluzione dà un massimo o un minimo, differenzio l' equazione $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x$, ed ho $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, quantità negativa, onde il valore $x = a$ dà un *massimo* $y = a^2$. In generale $y = x^m(2a - x)^n$ è un massimo o un minimo se $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(2a - x)^n - nx^m(2a - x)^{n-1} = 0 = m(2a - x) - nx$. Allora $x = \frac{2am}{m + n}$, valore che dà un massimo perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -m - n$.

II°. Trovar due diametri conjugati dell' ellisse che facecian tra loro il minimo angolo. Sieno m, n i diametri, p l' angolo che fanno tra loro, e si avrà (766) $mn\,sen\,p = ab$, ed $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, onde $sen\,p = \ldots\ldots\ldots \frac{ab}{n\sqrt{(a^2 + b^2 - n^2)}}$, $\frac{d\,sen\,p}{dn} = \frac{-ab(a^2 + b^2 - 2n^2)}{n^2\sqrt{(a^2 + b^2 - n^2)^3}} = 0$, ed $n = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = m$. Il denominatore eguagliato a zero, cioè il rotto $\frac{d\,sen\,p}{dn}$ eguagliato all'infinito (878), darebbe $n^2 = a^2 + b^2$ ed $m = 0$, valori che non servono. Sicchè i diametri conjugati ed eguali dell' ellisse forman con la loro intersezione il minimo angolo cercato il cui seno è $sen\,p = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2}{a:b + b:a}$. Perciò se $a:b = tang\,u = tang$ CaB (646),

120. sarà $sen\,p = \frac{2\,tang\,u}{1 + tang^2u} = \frac{2\,tang\,u}{sec^2u} = (610)\ 2sen\,u\cos u = sen\,2u$, onde $p = 2u \pm Bab$.

III°. Di tutte le parabole del cono retto DCB, determinar la massima in superficie. Sia $BD = a$, $CD = b$, $PB = x$, e sarà $a : b :: x : AP = \frac{bx}{a}$, $PM = \sqrt{(ax - x^2)}$ (477), la superficie $mAMPm = \frac{4bx}{3a}\sqrt{(ax - x^2)} = y$ (come presto vedremo); dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx(3a - 4x)}{3a\sqrt{(ax - x^2)}} = 0 = 3a - 4x$; onde $x = \frac{3a}{4}$, che è un *massimo*, perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -4$. Il denominatore eguagliato a zero dà due *minimi* coi due valori $x = 0$, $x = a$ (878) che riducon la curva ad un punto o ad una retta. 178.

IV°. Di tutti i triangoli della stessa base AB e dello stesso perimetro, qual è quello della massima superficie? Sia q il semiperimetro, la base $AB = a$, il lato $AM = x$; sarà $MB = 2q - a - x$. Dunque chiamando y la superficie, si avrà (529) $y = \sqrt{[q(q-a)(q-x)(a+x-q)]}$, $2ly = lq + l(q-a) + l(q-x) + l(a+x-q)$, $\frac{2dy}{y} = \frac{-dx}{q-x} + \ldots \frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x}\right) = 0$; dunque $a + x - q = q - x$, $2q - a - x = x$; e perciò il triangolo cercato è isoscele. 179.

880. Per trovare ora in quali casi una funzione Y di due variabili x, y indipendenti tra loro, divenga un *massimo* o un *minimo*, supponghiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziar la funzione Y facendo variare x sola, ed eguagliare a zero il coefficiente di dx. Così per aver y si differenzierà la funzione Y facendo variare y sola, ed eguagliando il coefficiente di dy a zero. Onde se $dY = Pdx + Qdy$, si deve aver $P = 0$, $Q = 0$, equazioni che daranno i valori di x e di y proprj a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*. Per distinguer l'uno dall'altro, posto $dY = Pdx + Qdy$ e prese dx, dy costanti, sarà $d^2Y = dPdx + dQdy$; onde fatto $dP = Adx + Bdy$, $dQ = Bdx + Cdy$ (854), verrà $d^2Y = (Adx + Bdy)dx + (Bdx + Cdy)dy$: ma si è visto che dee aversi $P = 0$ è però $dP = Adx + Bdy = 0$; dunque $dx = \frac{-Bdy}{A}$ e $d^2Y = dQdy = (Bdx + Cdy)dy = ($ —

$\frac{B^2}{A}+C)\,dy^2$ ovvero $\frac{d^2Y}{dy^2}=C-\frac{B^2}{A}$. Ora quando si ha una sola variabile x o y, e però $y=0$ ovvero $x=0$, viene $dY=Pdx$; $d^2Y=dPdx=Adx^2$ ovvero $dY=Qdy$, $d^2Y=dQdy=Cdy^2$, e si è detto che Y è *minimo* o *massimo* se $A>0$ e $C>0$ ovvero $A<0$ e $C<0$ (879); dunque se si abbiano x, y insieme, sarà Y un *minimo* quando $A>0, C>0$ ed inoltre $C-\frac{B^2}{A}>0$, ovvero $AC>B^2$: e sarà un *massimo* quando $A<0, C<0$ ed inoltre $C-\frac{B^2}{A}<0$ ovvero (giacchè ora A, C son negativi) $-C+\frac{B^2}{A}<0$ cioè $AC>B^2$ come nel caso del *minimo*. Questa teoria facilmente si estende alle funzioni di tre, quattro ec. variabili.

Si voglia dividere il numero dato $3a$ in tre parti il cui prodotto sia un *massimo*. Chiamando x, y due di queste parti, la terza sarà $3a-x-y$, ed avremo $xy(3a-x-y)$, la cui differenziale è $(3a-2x-y)ydx+(3a-2y-x)xdy$. Eguagliando a zero separatamente i coefficienti di dx, dy, si avrà $3a-2x-y=0=3a-2y-x$, onde $y=x=a$; e poichè $P=(3a-2x-y)y$, $dP=-2ydx+(3a-2x-2y)dy$, $A(=-2y=-2a)<0$, $B=3a-2x-2y=-a$, e poi $Q=(3a-2y-x)x$, $dQ=-2xdy+(3a-2x-2y)dx$, $C(=-2x=-2a)<0$, sarà $AC(=4a^2)>B^2(=a^2)$, e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un *massimo*.

Tra tutti i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha maggior superficie. Sieno x, y due de' suoi lati, $2q$ il perimetro, $2q-x-y$ sarà l' altro lato, e la superficie $Y=\sqrt{[q(q-x)(q-y)(x+y-q)]}$ (529); dunque $2lY-lq=l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q)$, e $dY=\ldots$ $\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)+\frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right)$. Eguagliando a zero i coefficienti di dy, dx, si ha $x+y-q=q-y=q-x$; onde $x=y=\frac{2q}{3}=2q-x-y$, e il triangolo ricercato è equilatero.

176. 881. Serve questo metodo a determinare ancora i *punti d' inflessione* (736); poichè nei due triangoli infinitesimi $mm'r$, $m'or'$ d' una stessa base dx, l' angolo $mm'r\ (=mtP)<m'or'\ (=m't'P)$, onde anche $mr<m'r'$, cioè la differenza dy dell' ordinata che da A scorre in PM, e da PM o procede

... torna indietro, scema sempre nella concavità della curva; e potrebbe dimostrarsi nel modo stesso che sempre cresce nella sua convessità. Dunque nel punto M d'inflessione la differenza dy diviene un minimo o un massimo, cioè (878) $ddy = o$ ovvero ∞: ma il raggio osculatore MC, presa dx costante, diviene infinito se $ddy = o$, e diviene zero se $ddy = \infty$ (868. 870); dunque *nel punto d' inflessione il raggio osculatore è sempre infinito o nullo*, e perciò $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : - \frac{ddy}{dx^2} = \infty$ ovvero $= o$, e $\frac{-ddy}{dx^2} = o$ ovvero ∞. Si differenzierà dunque due volte l' equazion della curva, posta dx costante, e il valor di $\frac{-ddy}{dx^2}$ eguagliato a zero o all' infinito, darà i valori di x, y convenienti ad uno o più punti d' inflessione. Che se l' ordinate partano da un punto fisso, si avrà $\frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2} = o$ ovvero ∞ (870).

882. Per vedere se $\frac{d^2y}{dx} = o$ dà veramente un' inflessione in M, condottavi la tangente Tt e presa $Pp = Pp' = a$, alzo l' ordinate $pvm, p'm'v'$ e da M, v' le normali $Mr, v'r'$. I triangoli simili MTP, vMr = $Mv'r'$ danno TP $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: PM (y) :: Mr (a) : $rv = r'M = \frac{ady}{dx}$, onde $pv = y + \frac{ady}{dx}$ e $p'v' = Pr' = y - \frac{ady}{dx}$. Or fatta $\frac{d^2y}{dx} = o$ ed a negativa in Pp', si ha come sopra (879) $pm = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{ady}{dx} - \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$; dunque se $\pm \frac{d^3y}{dx^3}$ non sia zero, verrà (col segno +) $pm > pv$ e $p'm' < p'v'$, o (col segno −) $pm < pv$ e $p'm' > p'v'$; dunque degli archi Mm', Mm l' uno sarà di quà, l' altro di là da Tt, e si avrà in M un' inflessione (736), ciò che non potrebbe concludersi se fosse $\frac{d^3y}{dx^3} = o$ ec. In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ ec. *che vanno a zero, il seguente determinerà l' inflessione*: in altro caso ella non vi sarà. Ecco gli esempj.

174.

I. Sia la prima parabola cubica in cui $y^3 = a^2x$; si avrà

$dy = \frac{dx}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}, \frac{-ddy}{dx^2} = \frac{2}{9x}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} = 0$ nel punto d' inflessione; dunque $x = 0$, e questo punto è nell' origine.

II. Sia la concoide in cui $y = \frac{b+x}{x}\sqrt{(a^2-x^2)}$ (784); si avrà $dy = \frac{-dx(a^2b+x^3)}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)}}, \frac{-ddy}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a^2x^3+3a^2bx^2-2a^4b}{(a^2x^3-x^5)\sqrt{(a^2-x^2)}} = 0$; onde $x^3+3bx^2-2a^2b = 0$, equazione che risoluta (337) dà per x il valor conveniente al punto d' inflessione.

III. Sia la curva dell' equazione $y-a = (x-a)^{\frac{3}{5}}$; si avrà $dy = \frac{3dx}{5\sqrt[5]{(x-a)^2}}, \frac{-ddy}{dx^2} = \frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma eguagliato all' infinito dà $x = a = y$, valori corrispondenti al punto d' inflessione.

Rotti i cui termini si riducono a zero.

883. Si trovan talvolta dell' espressioni algebriche in forma di rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$, come $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x = a$. Questi risultati apparentemente indeterminati, son suscettibili di valori determinati; ed ecco un metodo per trovarli.

Sia $\frac{P}{Q}$ una funzione di x il cui numeratore e denominatore si riducono a zero quando $x = a$. Si sostituisca $a \pm dx$ ad x in P ed in Q (si prende — se + guida ad assurdo) e trascurati i termini ove è dx^2, dx^3 ec. come infinitesimi rispetto a dx, si avrà il valore del rotto proposto, se pure i termini del nuovo rotto non si annullino nuovamente. Ecco gli esempj.

I. Cerco il valor di $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x = a$. Quì $P = x^2 - a^2$, e $Q = x - a$; dunque $\frac{(a+dx)^2-a^2}{a+dx-a} = \frac{2adx}{dx} = 2a$.

II. La somma della progressione $\div\div x : x^2 : x^3 \ldots x^n$, è $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$ il cui valore quando $x = a = 1$, sarà . . . . . .

$\frac{(1+dx)^{n+1}-1-dx}{1+dx-1}=n.$

III. Sia $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ ed $x=a$. Si avrà $\sqrt{(2a^3x-x^4)}=a\sqrt{(a^2-2adx)}=a(a-\frac{2adx}{2a}$ ec. (161)), $-a\sqrt[3]{a^2x}=-a\sqrt[3]{(a^3+a^2dx)}=-a(a+\frac{a^2dx}{3a^2}$ ec.), $a-\sqrt[4]{ax^3}=a-\sqrt[4]{(a^4+3a^3dx)}=a-(a+\frac{3a^3dx}{4a^3}$ ec.); riducendo si trova $\frac{-4adx}{3\times-\frac{3dx}{4}}=\frac{16a}{9}$.

884. Ma se succeda che anche il nuovo rotto divenga $\frac{0}{0}$, si passerà a considerar dx^2, dx^3, ec., finchè si abbia in quantità finite uno almeno dei suoi termini.

Es. Differenziata l' equazione $x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$, si divida per $\frac{dx}{x}$, e verrà $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$ quando $x=1$, e sostituendo $1+dx$ ad x, si ha nuovamente $\frac{0}{0}$; ma se non si trascuri dx^2, come si fece in principio (883), verrà ... $\frac{n(n+2)(n+1)dx^2-(n+1)^2ndx^2}{2dx^2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

885. Con ciò si trova nei casi particolari il valore di $0\times\infty$ e di $\infty-\infty$; poichè $0\times\infty=0\times\frac{a}{0}=\frac{0}{0}$, ed $\infty-\infty=\frac{a}{0}-\frac{b}{0}=\frac{0}{0}$; così se $x=1$, si ha $\frac{1}{lx}-\frac{x}{lx}=\infty-\infty$, onde sostituendo $1+dx$ ad x, verrà $\frac{-dx}{l(1+dx)}=(301)\frac{-dx}{dx\text{ ec}}=-1$.

886. Possono anche determinarsi i punti multipli delle curve (735) e la loro moltiplicità; poichè differenziando per esempio l' equazione $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$, si trova

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)(3x-a)}{2a(y-b)} = \frac{0}{0}$ quando $x=a$, $y=b$; sostituendo dunque $a+dx$ ad x, e $b+dy$ ad y, trascurato dx^2, verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy}$, $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, e $\frac{dy}{dx} = \pm 1$: ma $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo che la curva (o la sua tangente) fa con l'asse delle x (646); dunque se questa tangente ha più valori, apparterrà a più rami di curva che passano per uno stesso punto; e nel nostro caso all' ascissa $x=a$ corrisponderà un' ordinata $y=b$ che incontra la curva in un punto multiplo, ove son due tangenti eguali al raggio 1, e che fanno perciò un angolo di 45° con la retta condotta per il punto multiplo parallelamente all' asse.

887. Questo metodo per valutare $\frac{0}{0}$ è generale; quello di Bernoulli che prescrive di differenziar separatamente quante volte occorre, il numeratore e il denominator del rotto, non sempre riesce: così dato $\sqrt{\left(\frac{2a^2-3ax+x^2}{a-x}\right)}$ e supposto $x=a$, dal nostro metodo se ne avrà subito il valore $\sqrt{a}$, che da quello di Bernoulli non si otterrà giammai.

Teorema di Taylor.

888. Già si è detto (823) che supposta Y una funzione di x, se questa divenga $x \pm ndx$ e sia $ndx = a$ quantità finita, si avrà $Y = y \pm \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} \pm \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3} + \frac{a^4d^4y}{2.3.4dx^4} \pm$ ec., presa dx costante. Questa serie si chiama il *Teorema di Taylor* dal dotto Geometra Inglese che la trovò.

889. Per vederne la verità in un esempio semplice, suppongasi $y = xx - 2x + 1$, e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $x+1$ ad x. Avremo $a=1$, $\frac{dy}{dx} = 2x-2$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ec.; dunque y si cangia in $x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$, il che è evidente.

890. Sia $y = x^m$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{ddy}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ ec. Dunque se x diviene $x+a$, y diventerà $(x+a)^m = x^m +$

$= x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} +$ ec.; facendo $a = \frac{-bx}{x+b}$ e però $x + a = \frac{x^2}{x+b}$, avremo $(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{mbx^m}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2x^m}{2(x+b)^2}$ — ec., ovvero $\frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{mx^{-m}b}{x+b} + \frac{m(m-1)x^{-m}b^2}{2(x+b)^2}$ — ec. $= x^{-m}(1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2}{2(x+b)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2 \cdot 3(x+b)^3} +$ ec.), serie che ha un numero finito di termini quando m è un intero: se $n = -m$, si avrà $(x+b)^n = x^n(1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n(n+1)b^2}{2(x+b)^2} +$ ec.). Si posson verificar queste formule riducendo i rotti $\frac{1}{x+b}, \frac{1}{(x+b)^2}$, ec. in serie, che serviranno a trovar le radici dei numeri prontamente, perchè posson sempre rendersi convergentissime.

891. Sia ora $y = lx$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}$ ec., e si avrà $l(x \pm a) = lx \pm \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} \pm \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} \pm$ ec. Sia $\pm a = \frac{\mp xx}{b \pm x}$, e avremo $l(x \pm a) = l\frac{bx}{b \pm x} = lbx - l(b \pm x) = lx \mp \frac{x}{b \pm x} - \frac{x^2}{2(b \pm x)^2} \mp \frac{x^3}{3(b \pm x)^3}$ — ec. Dunque $l(b \pm x) = lb \pm \frac{x}{b \pm x}(1 \pm \frac{x}{2(b \pm x)} + \frac{x^2}{3(b \pm x)^2} \pm$ ec.), serie convergenti che facilitan molto il calcolo dei logaritmi.

892. Sia $y = b^x$; avremo $\frac{dy}{dx} = b^x lb, \frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b$ ec.; dunque $b^{x+a} = b^x(1 + alb + \frac{a^2l^2b}{2} + \frac{a^3l^3b}{2 \cdot 3} +$ ec.), e perciò $b^a = 1 + alb + \frac{a^2l^2b}{2} + \frac{a^3l^3b}{2 \cdot 3} +$ ec. (307).

893. Sia y un arco il cui seno è x che indicheremo con $y = \text{A} \, sen \, x$; si avrà $x = sen \, y, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos \, y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}, \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen \, y}{cos^3 y} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$ ec.; dunque Asen $(x \pm$

$a) = A\,sen\,x \pm \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{a^2x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \pm \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} +$ ec. $=$
$A\,sen\,x \pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2x}{2cos^3y} \pm$ ec.

894.* Queste serie sono attissime a calcolar l'arco che corrisponde a un seno dato. Preso dalle Tavole l'arco più vicino, la differenza del suo seno x dal dato renderà a piccolissima, e si avrà l'arco cercato aggiungendo $\pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2x}{2\,cos^3y}$ ec. a quello il cui seno è x. Osservate 1°., che la serie è sì convergente che i due primi termini danno i minuti quinti in circa: 2°. che l'arco è espresso in parti del raggio 1, e per ridurle a secondi, a terzi ec., bisogna dividerle per la lunghezza dell'arco di 1″ (522), posto il logaritmo dell'unità $= 10$: il quoziente dà i secondi, e di quì i terzi, i quarti ec.

895. Facciamo $y = A\,cos\,x$, e avremo $x = cos\,y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sen\,y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$, ec; dunque $A\,cos(x \pm a) = A\,cos\,x \mp \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{a^2x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \mp \ldots \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} -$ ec., serie di cui si fa lo stesso uso che delle precedenti. Se ne troveranno delle simili per l'arco la cui tangente sia $x \pm a$.

896. Sia ora $y = sen\,x$, e avremo $\frac{dy}{dx} = cos\,x$, $\frac{ddy}{dx^2} = -sen\,x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -cos\,x$ ec.; dunque $sen\,(x \pm a) = sen\,x \pm a\,cos\,x - \frac{a^2}{2}\,sen\,x \mp \frac{a^3}{6}\,cos\,x + \frac{a^4}{24}\,sen\,x +$ ec. Parimente se $y = cos\,x$, si avrà $cos\,(x \pm a) = cos\,x \mp a\,sen\,x - \frac{a^2}{2}\,cos\,x \pm \frac{a^3}{6}\,sen\,x + \frac{a^4}{24}\,cos\,x -$ ec. Queste formule son di grandissimo uso per interpolar le Tavole dei seni. Se sia $x = 0$, i valori di $sen\,(x + a)$, $cos\,(x + a)$ diverranno a cagion di $sen\,x = 0$ di $cos\,x = 1$, quelli che già trovammo (628).

897. Fatto $y = tang\,x$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{sen\,x}{cos^3 x} \ldots$ $\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{3sen^2 x}{cos^4 x} = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$ (610) ec., sarà $tang(x \pm a) = tang\,x \pm \frac{a}{cos^2 x} + \frac{a^2 sen\,x}{cos^3 x} \pm \frac{a^3}{cos^4 x} + \frac{a^4 sen\,x}{cos^5 x} \pm$ ec. $\mp \ldots$ $\frac{2a^3}{3cos^2 x} - \frac{a^4 sen\,x}{3cos^3 x} \mp$ ec.: ma $\frac{\pm a + a^2 tang\,x}{cos^2 x}, \frac{\pm a^3 + a^4 tang\,x}{cos^4 x}$, $\pm$ ec. è una progression geometrica il cui primo termine $= \frac{\pm a + a^2 tang\,x}{cos^2 x}$, l'ultimo $= \frac{1}{\infty} = 0$, e il quoziente $= \frac{a^2}{cos^2 x}$; dunque la somma (259) $= \frac{a^2 tang\,x \pm a}{cos^2 x - a^2}$, e però $tang(x \pm a) = tang\,x + \frac{a^2 tang\,x \pm a}{cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3cos^2 x} - \frac{a^4\,sen\,x}{3cos^3 x} -$ ec. $= \ldots\ldots$ $\frac{sen\,x\,cos\,x \pm a}{cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3cos^2 x} - \frac{a^4\,sen\,x}{3cos^3 x} \mp$ ec. Si troveranno delle formule simili per $cot(x \pm a)$.

898. Sia ora $y = ml\,sen\,x$ o al logaritmo ordinario di $sen\,x$ se m rappresenta il modulo; si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m\,cos\,x}{sen\,x}$ (1014), $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{sen^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m\,cos\,x}{sen^3 x}$ ec.; dunque $l\,sen(x \pm a) = l\,sen\,x \pm am\frac{cos\,x}{sen\,x} - \frac{ma^2}{2sen^2 x} \pm \frac{a^3\,m\,cos\,x}{3sen^3 x}$ ec.

899. Se $y = ml\,cos\,x$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{-m\,sen\,x}{cos\,x}$ (851), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-m}{cos^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2m\,sen\,x}{cos^3 x}$ ec.; dunque $l\,cos(x \pm a) = l\,cos\,x$ $\mp \frac{am\,sen\,x}{cos\,x} - \frac{a^2 m}{2cos^2 x} \mp \frac{a^3 m\,sen\,x}{3cos^3 x} -$ ec. Sia $y = ml\,tang\,x$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2m}{sen\,2x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2m\,cos\,2x}{sen^2 2x}$ ec. e perciò $l\,tang(x \pm a) = l\,tang\,x \pm \frac{2am}{sen\,2x} -$ ec.. Lo stesso sarà per $ml\,cot\,x$.

900. Supposto ora che y sia l'arco il cui logaritmo del seno è x, ovvero $y = Al\,sen\,x$, si avrà $x = l\,sen\,y$, e perciò $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\,y}{m\,cos\,y} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\,y}{m^2\,cos^3 y}$ ec.; dunque $Al\,sen\,(x \pm$

$a) = y \pm \frac{a\, sen\, y}{m \cos y} + \frac{a^2\, sen\, y}{2m^2 \cos^3 y} \pm$ ec.

901. Sia $y = Al\, tang\, x$; verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, 2y}{2m}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\, 4y}{4m^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{sen\, 2y \cos 4y}{2m^3}$ ec.; dunque $Al\, tang(x \pm a) = y \pm \ldots$ $\frac{a\, sen\, 2y}{2m} + \frac{a^2 sen\, 2y \cos 2y}{4m^2} \pm \frac{a^3 sen\, 2y \cos 4y}{12m^3} +$ ec. Queste formule posson servire a risolvere con molta approssimazione i problemi sull' uso delle Tavole dei seni.

902. La serie $y \pm \frac{ady}{dx} +$ ec. (888) da cui nascono queste ed infinite altre applicazioni, induce talvolta in inganno se si adopri senza cautela, come può vedersi nei casi benchè semplicissimi di $y = lx$ (891) e di $y = sen^{\frac{m}{n}} x$ quando $x = o$ nel primo, ed $n > m$ nel secondo.

ALTRE REGOLE DEL CALCOLO INTEGRALE

Metodo per ridurre l' integrazione di più differenziali binomie a quella d' altre differenziali conosciute.

903. Debbasi integrare $x^n dx (a + bx^m)^k$ supponendo nota l' integrale di $x^p dx (a + bx^m)^k$, ed $n > p$. Poichè $d[x^{q+1} (a + bx^m)^{k+1}] = a(q+1) x^q dx (a + bx^m)^k + b(mk + m + q + 1) x^{m+q} dx (a + bx^m)^k$, sarà integrando quest' equazione, $\int x^{m+q} dx (a + bx^m)^k = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{x^{q+1} (a + bx^m)^{k+1}}{b(mk + m + q + 1)} - \frac{a(q+1) \int x^q dx (a + bx^m)^k}{b(mk + m + q + 1)}$. Sia $m + q = n$, o $q = n - m$; si avrà $\int x^n dx (a + bx^m)^k = \ldots$ $\frac{x^{1+n-m} (a + bx^m)^{k+1}}{b(mk + n + 1)} - \frac{a(n - m + 1)}{b(mk + n + 1)} \int x^{n-m} dx (a + bx^m)^k$. Se in questa stessa espressione in vece di n si scri-

va $n-m, n-2m$ ec., si avranno i valori di $\int x^{n-m} dx (a+bx^m)^k$, di $\int x^{n-2m} dx (a+bx^m)^k$, in generale di $\int x^{n-im} dx (a+bx^m)^k$, essendo i un intero positivo; e la formula sarà $\int x^n dx (a+bx^m)^k = (a+bx^m)^{k+1} \Big(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} -$

$\frac{a(1+n-m)(A)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(B)}{bx^m(1+n+m(k-2))} - \ldots -$

$\frac{a(1+n-m(i-1))(Z)}{bx^m(1+n+m(k-i+1))} \Big) \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots\ldots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\ldots(1+n+m(k-i+1))} \int x^{n-im} dx$

$(a+bx^m)^k$, ove le lettere (A), (B) .... (Z) indicano che il termine in cui sono, dee moltiplicarsi per il precedente, ed il segno superiore ha luogo quando i è pari, l'inferiore quando è impari. Ora se $n-im=p$, cioè se $\frac{n-p}{m}=i$ è un intero positivo, $\int x^n dx (a+bx^m)^k$ potrà con la formula precedente ridursi a $\int x^p dx (a+bx^m)^k$, presi tanti termini della serie e tanti fattori nel numeratore e denominator del termine fuor di serie, quante sono unità in i.

Esemp. Sia $\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ da ridursi a $\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, che si ha quadrando il circolo, come vedremo: sarà $n=10$, $a=1, b=-1, m=2, k=\frac{1}{2}, p=0, \frac{n-p}{m}=i=5$; dunque

$\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big(-\frac{1}{12}x^9 - \frac{9}{12.10}x^7 - \ldots$

$\frac{9 \cdot 7}{12.10.8}x^5 - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{12.10.8.6}x^3 - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{12.10.8.6.4}x \Big) + \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{12.10.8.6.4} \frac{1}{}\int dx (1-$

$x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

Così $\int x^{r \pm cs - 1} dx (a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$ si riduce a $\int x^{r-1} dx (a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$: onde se $a=1, b=-1, c=1, s=2, t=-1, u=2$, anche $\int x^{r+1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ si ridurrà a $\int x^{r-1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

e poichè $r = 1, = 2$ dà $\int x^{r-1} dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = arc.\ sen\ x$ (850) $= -\sqrt{(1 - x^2)}$, si avrà sempre $\int x^{r+1} dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ o il numero intero e positivo r sia impari o sia pari.

904. Se i sia numero intero negativo, in luogo di ridurre $\int x^n dx (a + bx^m)^k$ a $\int x^p dx (a + bx^m)^k$, si ridurrà questa alla prima.

Esemp. Sia $\int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1}$ da ridursi a $\int dx (1 + x^2)^{-1} = arc\ tang\ x$ (850); si avrebbe $n = -4, m = 2, p = 0$ ed $\frac{n-p}{m} = -2$; riducendo dunque la seconda alla prima, si avrà $n = 0, a = 1, b = 1, m = 2, k = -1, p = -4, -\frac{n-p}{m} = 2 = i$; onde $\int dx (1 + x^2)^{-1} = -x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1}$; dunque $\int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1} = x^{-1} - \frac{x^{-3}}{3} + \int dx (1 + x^2)^{-1}$.

905. Sia proposto ora di ridur $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ a $\int x^r dx (a + bx^m)^q$. Poichè $d[x^{n+1} (a + bx^m)^p] = (n+1) x^n dx (a + bx^m)^p + bmpx^{m+n} dx (a + bx^m)^{p-1}$, sarà $\int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1} (a + bx^m)^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{m+n} dx (a + bx^m)^{p-1}$. Se in questa stessa espressione si scriva $n + m, n + 2m$ ec. per n, e $p-1, p-2$ ec. per p, si avranno i valori di $\int x^{n+m} dx (a + bx^m)^{p-1}$, di $\int x^{n+2m} dx (a + bx^m)^{p-2}$ ec. e si troverà la seguente formula: $\int x^n dx (a + bx^m)^p = (a + bx^m)^p \times$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{1+n} - \frac{bmpx^m (A)}{(1+n+m)(a+bx^m)} - \frac{bm(p-1)x^m (B)}{(1+n+2m)(a+bx^m)} - \dots - \frac{bm(p-i'+2)(Z)}{(1+n+m(i'-1))(a+bx^m)}\right) \pm \dots\dots\dots\dots \frac{b^{i'} m^{i'} p(p-1)\dots(p-i'+1)}{(1+n)(1+n+m)\dots(1+n+m(i'-1))} \int x^{n+i'm} dx (a+bx^m)^{p-i'},$$

ove i segni e il numero dei termini e dei fattori si prendono come prima (903). Ora se $p - i' = q$ o se $p - q = i'$ è intero, l'integrale di $x^n dx (a + bx^m)^p$ si ridurrà a $\int x^{n+i'm} dx (a +$

$bx^m)^q$, la quale potendo ridursi a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ quando $n+i'm-im=r$, cioè quando $\frac{n-r}{m}$ è un intero positivo $i-i'$, anche la formula proposta vi si potrà ridurre.

Esemp. Sia da ridursi $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $n=4, a=1, b=-1, m=2, p=\frac{5}{2}, r=0, q=\frac{1}{2}, p-q=i'=2$. Dunque $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 3}{5\cdot 7}\int x^8 dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$: ma (903) $\int x^8 dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{x^7}{10}-\frac{7x^5}{10.8}-\frac{7\cdot 5x^3}{10.8.6}-\frac{7\cdot 5\cdot 3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$;

dunque $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^7}{10}-\frac{3x^5}{10.8}-\frac{3\cdot 5x^3}{10.8.6}-\frac{3\cdot 5\cdot 3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{3\cdot 5\cdot 3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

Così $\int x^{r-1} dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\pm 1}$ e $\int x^{r\pm s-1} dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\mp 1}$ si riducono a $\int x^{r-1} dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$.

906. Se i' sia numero intero negativo, si operi come sopra (904).

Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

907. Suppongo $\frac{Pdx}{Q}$ un rotto razionale, ed il maggiore esponente di x in P almeno d'un'unità minore che in Q, condizione che può sempre ottenersi còn la divisione: così $\frac{x^4 dx}{a+bx^3}=\frac{xdx}{b}-\frac{axdx}{b(a+bx^3)}$ la cui seconda parte è quale l' abbiam supposta per $\frac{Pdx}{Q}$. Ora cerco i fattori di Q (318), e se questi son tutti del primo grado, reali, ed ineguali, il rotto proposto avrà la forma $\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+\omega}{(x-f)(x-g)(x-k)\,\text{ec.}}\times dx$, supponendo che il numero de' fattori $x-f, x-g$ ec. sia m.

Per integrare in questo caso, decompongo il rotto così: $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+$ ec. la cui integrale è $Al(x-f)+Bl(x-g)+$ ec. $+C$, e determino al solito i coefficienti di A, B ec. (273).

Es. Si voglia integrar $dy=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$; faccio $\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Ddx}{a+x}=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$, e operando al solito, trovo

$$\left.\begin{matrix}Aa^2+Bax+Bxx\\-1+Da-A\\-D\end{matrix}\right\}=0;$$ dunque $A=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{1}{2a^2}$,

$D=-\frac{1}{2a^2}$, e $dy=\frac{dx}{a^2x}+\frac{dx}{2a^2(a-x)}-\frac{dx}{2a^2(a+x)}$; onde $y=\frac{lx}{a^2}-\frac{l(a-x)}{2a^2}-\frac{l(a+x)}{2a^2}+\frac{lC}{a^2}=\frac{1}{a^2}l\frac{xC}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Si troverà pure $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}l\frac{C(a+x)}{a-x}$.

908. Se alcuni fattori di Q sieno eguali, ed $(x-a)^m$ esprima un numero m di essi, il rotto si decomporrà in $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+$ ec. $+\frac{A'x^{m-1}+B'x^{m-2}+\text{ec.}\dots+R}{(x-a)^m}dx$, e determinati i coefficienti come sopra, s' integrerà $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m}dx+\frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m}dx+$ ec. facendo $x-a=z$.

Esemp. Sia da integrarsi $dy=\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{Adx}{x}+\frac{(Bx+C)dx}{(x-1)^2}+\frac{(Dx+E)dx}{(x+1)^2}$; onde $A=2$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{7}{4}$, $D=-\frac{5}{4}$, $E=-\frac{7}{4}$; e però $dy=\frac{2dx}{x}+\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}-\dots\frac{(5x+7)dx}{4(x+1)^2}$. Per integrare il rotto $\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}$, faccio $x-1=z$, il che lo cangia in $\frac{(4-3z)dz}{4z^2}=\frac{dz}{z^2}-\frac{3dz}{4z}$, la cui integrale è $-\frac{1}{z}-\frac{3lz}{4}=\frac{-1}{x-1}-\frac{3l(x-1)}{4}$, e trattando così

l' altro

L'altro rotto, trovo l'integrale $y = 2lx - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4} l(x-1) - \frac{5}{4} l(x+1) + C$.

909. Se sieno in Q dei fattori immaginarj, esprimendosi un di essi con $x + a + b\sqrt{-1}$, ve ne sarà un altro della forma $x + a - b\sqrt{-1}$. Dunque il loro prodotto $x^2 + 2ax + b^2 + a^2$, o per brevità $x^2 + mx + n$, sarà un fattor reale di Q. Perciò si determinerà (846) questo fattore, e poi si supporrà che $\frac{(Ax+B)dx}{x^2+mx+n}$ sia uno dei rotti parziali di $\frac{Pdx}{Q}$, e si avrà A e B come sopra. Quindi facendo $x + \frac{m}{2} = z$ ed $n - \frac{m^2}{4} = b'b'$, il rotto diventerà $\frac{(A'z+B')dz}{zz+b'b'} = \frac{A'zdz}{zz+b'b'} + \frac{B'dz}{zz+b'b'}$. Ora $\int \frac{A'zdz}{zz+b'b'} = \frac{A'}{2} l(zz+b'b')$ (851) e

$$B' \int \frac{dz}{zz+b'b'} = \frac{B'}{b'} \int \frac{\frac{dz}{b'}}{1+\frac{zz}{b'b'}} = \frac{B'}{b'} \times Arcotang \frac{z}{b'} + C \text{ (850)},$$

ove l'arco è espresso in parti del raggio 1; onde per valutarlo in gradi bisogna moltiplicarlo per 57°,296 (521).

Es. Sia $dy = \frac{(z^2-z+1)dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{Adz}{1+z} + \frac{(Bz+C)dz}{1+zz}$; si troverà $A = \frac{3}{2}$, $B = C = -\frac{1}{2}$, onde $dy = \frac{3dz}{2(1+z)} - \frac{zdz}{2(1+zz)} - \frac{dz}{2(1+zz)}$ ed $y = \frac{3}{2} l(1+z) - \frac{1}{4} l(1+z^2) - \frac{1}{2} \times Arcotang\, z + C$.

Sia anche $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$ che si riduce a $\frac{dx}{x} - \frac{(2x+3)dx}{(1+x)^2} + \frac{xdx}{1+x+xx}$. Quest' ultima quantità, posto $x = z - \frac{1}{2}$, diviene $\frac{zdz}{z^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2+\frac{3}{4}}$, la cui integrale, fatto $B' = 1$, $b' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, è $\frac{1}{2} l(z^2+\frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} Arctang \frac{2z}{\sqrt{3}}$. Sostituendo dunque il valor di z, si trova per l'intera integrale $lx -$

$2l(1+x)+\frac{1}{2}\,l(1+x+x^2)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,Arc\,tang\,\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+C$.

910. Infine se Q abbia uno o più fattori di questa forma $(x^2+ax+b)^m$, si supporrà che il rotto parziale provenuto da questo fattore sia $dx\left(\frac{Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+ec.+R}{(x^2+ax+b)^m}\right)$ e si determineranno i coefficienti A, B ec. come sopra. Quindi facendo $x=z-\frac{a}{2}$ e sostituendo, il rotto diverrà . . . $\frac{A'z^{2m-1}+B'z^{2m-2}+ec.+R'}{(z^2+b'b')^m}dz$ che può decomporsi così: $\frac{A'z^{2m-1}}{(z^2+b'b')^m}dz+\frac{B'z^{2m-2}}{(z^2+b'b')^m}dz+$ ec.: ma i termini ove il numeratore ha una potenza impari sono integrabili in parte algebricamente e in parte per logaritmi (856), e quelli ove z nel numeratore ha una potenza pari essendo della forma $\frac{Mz^{2k}dz}{(z^2+b'b')^m}$ posson ridursi (904) a $\frac{dz}{z^2+b'b'}$, cioè possono integrarsi in parte algebricamente e in parte per archi di circolo; dunque con questo mezzo si avrà l' integrale del dato rotto.

911. Ecco un esempio che comprende tutti questi metodi. Sia $dy=\frac{dx}{(1+x)xx(x^2+2)(x^2+1)^2}=\frac{Adx}{1+x}+\frac{(Bx+C)dx}{x^2}+\frac{(Dx+E)dx}{x^2+2}+\frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(x^2+1)^2}$. Si troverà $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$, $E=-\frac{1}{6}$, $F=\frac{1}{4}$, $G=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$ e $dy=\frac{dx}{12(1+x)}+\frac{(1-x)dx}{2x^2}+\frac{(x-1)dx}{6(x^2+2)}+\frac{(x^3-x^2+3x-3)dx}{4(x^2+1)^2}$. Ora $\frac{1}{12}\int\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{12}l(1+x)\ldots\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)dx}{x^2}=\frac{1}{2}l\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}\ldots\frac{1}{6}\int\frac{xdx-dx}{x^2+2}=\frac{1}{12}l(x^2+2)(857)-\frac{1}{6\sqrt{2}}\,Arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{2}}$ (858)$\ldots\frac{1}{4}\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{8}l(x^2+1)+\frac{1}{8(x^2+1)}$ (857) ... $\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{3}{8(x^2+1)}$ (857). Per integrare I. $\frac{-x^2dx}{4(x^2+1)^2}$ II. $-\frac{3dx}{4(1+x^2)^2}$, riduco $\int\frac{dx}{1+x^2}$ alla I., e si avrà (906) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}$

$+2\int x^2 dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int x^2 dx\,(1+x^2)^{-2}=\frac{-x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x$: ma riducendo la I. alla II. (903), $\int x^2 dx(1+x^2)^{-2}=-x(1+x^2)^{-1}+\int dx\,(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int dx\,(1+x^2)^{-2}=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x$. Riunendo dunque tutte queste integrali, sarà $y=\frac{1}{12}\,l(1+x)+\frac{1}{12}\,l(x^2+2)+\frac{1}{8}\,l(x^2+1)+\frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{(x+1)}{4(1+x^2)}-\frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x-\frac{1}{6\sqrt{2}}\,Arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

912. Dunque ogni differenziale frazionaria e razionale si integra o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo. La difficoltà consiste nel trovare i fattori di Q, difetto piuttosto dell' Algebra che del metodo d' integrazione. Notiamo alcuni casi in cui un rotto radicale può rendersi razionale.

913. Sia $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt[4]{x}+xx}{x+\sqrt{x}}\right)dx$: ridotti i radicali allo stesso grado (146) verrà $\frac{dx(\sqrt[12]{x^4}+x\sqrt[12]{x^6}+x^2)}{x+\sqrt[12]{x^3}}$, e fatto $\sqrt[12]{x}=z$, onde $x=z^{12}, dx=12z^{11}dz$, la differenziale è razionale e però integrabile.

Sia X una funzione razionale di x e $dy=Xdx\sqrt{(a+bx+cx^2)}^{\pm 1}$; cerco i due fattori di $a+bx+cx^2$, e se son reali si troverà x per la nota formula (368. 8°.), e quindi dx, dopo di che si potrà integrare. Se per esempio, $dy=dx\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}$, si farà (368. 8°.) $\pm a^2\mp x^2=Q=\frac{(x+a)(\pm a\mp x)}{(\pm a\mp x)^2}=\frac{x+a}{\pm a\mp x}=z^2$, onde $x=\frac{\mp a+az^2}{z^2\pm 1}$, $dx=\frac{\pm 4azdz}{(z^2\pm 1)^2}$, e $\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}=\frac{2az}{z^2\pm 1}$; dunque $dy=\frac{\pm 8a^2z^2dz}{(z^2\pm 1)^3}$. La formula col segno + si integra riducendo $\int dz(z^2+1)^{-1}$ a $\int z^2dz\,(z^2+1)^{-3}$ (906), il che dà $\int z^4dz(z^2+1)^{-3}$; onde poi riducendo questa a $\int z^2dz(z^2+1)^{-3}$ (903), si trova $8a^2\int z^2dz\,(1+$

$z^2)^{-3} = \frac{2a^2z^3}{(1+z^2)^2} - \frac{a^2z}{1+z^2} + a^2 \times arc\,tang\,z + C$, ovvero sostituito il valor di z, $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \times arc\,tang\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. Ma la formula col segno – si integra al solito (908) e si ha $\int -\frac{8a^2z^2dz}{(z^2-1)^3} = -\frac{a^2}{2}l\frac{z+1}{z-1} + \frac{a^2z}{2(z+1)^2} + \frac{a^2z}{2(z-1)^2} + C$, ovvero sostituito il valor di z (e osservando che $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)^2}{z^2-1} = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$), $\int dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}l\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + C$.

Se $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}}$, fatto come prima $\frac{x+a}{\pm a \mp x} = z^2$, sarà $dy = \frac{\pm 2dz}{z^2 \pm 1}$; e col + verrà $y = 2 \times arc\,tang\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, col – si avrà $y = l\frac{C}{a}[x+\sqrt{(x^2-a)}]$ (907).

914. Se i fattori di $a+bx+cx^2$ sono immaginarj, faccio svanire il secondo termine ponendo $x+\frac{b}{2c} = z$ ed ho $Zdz \times \sqrt{[z^2+c^2]}^{\pm 1}$. Sia dunque $z^2+c^2 = Q$, onde fatto nella nota formula (368. 4°.) $a = 1$, $A = u$, sarà $z = \frac{u^2-c^2}{2u}$ e $dz = \frac{du}{2u^2}(u^2+c^2)$, dopo di che si integrerà. Così se $dy = dx\sqrt{(x^2+a^2)}^{\pm 1}$, avremo $x = \frac{u^2-a^2}{2u}$, $u = x+\sqrt{(x^2+a^2)}$, $dx = \frac{du}{2u^2}(u^2+a^2)$, $\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{u^2+a^2}{2u}$, onde $dy = u^{-1}du(u^2+a^2)^{1\pm 1} \times (2u)^{-1\mp 1}$, cioè col segno di sopra, $dy = \frac{du(u^2+a^2)^2}{4u^3} = \frac{udu}{4} + \frac{a^2du}{2u} + \frac{a^4du}{4u^3}$, ed $y = C + \frac{u^4-a^4}{8u^2} + \frac{a^2}{2}lu$: ma $\frac{u^4-a^4}{8u^2} = \left(\frac{u^2-a^2}{4u}\right)\left(\frac{u^2+a^2}{2u}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}$; dunque $y = C +$

$\frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}+\frac{a^2}{2}l[\sqrt{(x^2+a^2)}+x]$. Col segno di sotto, $dy=\frac{du}{u}$ ed $y=lC[\sqrt{(x^2+a^2)}+x]$.

Metodi di integrar per Serie.

915. Quando una differenziale non ammette integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora l'ultimo compenso. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si ha una serie di termini monomj, le cui integrali riunite danno un valore approssimato di $\int Xdx$. Per esempio, l'integrale di $\frac{dx}{a+x}$ è $l(a+x)$ e $\frac{dx}{a+x}=\frac{dx}{a}-\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{a^3}$ — ec. (273); dunque $\int\frac{dx}{a+x}$ ovvero $l(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}$ — ec. + C: se si fa $x=0$, sarà $C=la$, e $l(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}$ — ec., onde $l(a-x)=la-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}$ — ec. Supponghiamo $\frac{x}{a}=\frac{z}{a+z}$, ed avremo $l(a-x)=2la-l(a+z)=la-\frac{z}{a+z}-\frac{z^2}{2(a+z)^2}$ — ec.; dunque $l(a+z)=la+\frac{z}{a+z}+\frac{z^2}{2(a+z)^2}+$ ec., serie tanto più convergente, quanto sarà z minor di a. Per esempio $l\,11=l(10+1)=l\,10+\frac{1}{11}+\frac{1}{2.11^2}+$ ec. $=$ 2,397 ec.

Così si ha $dy=\frac{dx}{1+xx}=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+$ ec. (273): ed $y=arc.\,tang\,x$ (850) $=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$ ec.

Così $dy=\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}}=dx\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3x^4}{2.4}+\frac{1.3.5x^6}{2.4.6}+\text{ec.}\right)$ (161); ed $y=arc.\,sen\,x$ (850) $=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}-\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7}+$ ec., integrale a cui non vi è co-

stante da aggiungere. Sia $x=1$, e la circonferenza $=\pi$, sarà $y=\frac{\pi}{4}=1+\frac{1.1}{2.3}+\frac{1.3.1}{2.4.5}+\frac{1.3.5.1}{2.4.6.7}+$ ec. Se $x=\frac{1}{2}$, l'arco diventa $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1.1}{2.3.2^3}+\frac{1.3.1}{2.4.5.2^5}+\frac{1.3.5.1}{2.4.6.7.2^7}+$ ec.

916. Bastino questi esempj: ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $Xx=\int Xdx+\int xdX$ dà $\int Xdx=Xx-\int xdX$. Sia $dX=X'dx$; dunque $\int xdX=\int X'xdx$ e fatto $xdx=dz$ onde $\frac{x^2}{2}=z$, sarà $\int X'dz=X'z-\int zdX'=\frac{1}{2}(X'xx-\int xxdX')$ Sia $dX'=X''dx$; dunque $\int x^2dX'=\int X''x^2dx$, e fatto $x^2dx=dz$ onde $\frac{x^3}{3}=z$, sarà $\int X''dz=X''z-\int zdX''=\frac{1}{3}(X''x^3-\int x^3dX'')$ ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione, si trova $\int Xdx=Xx-\frac{x^2}{2}X'+\frac{x^3}{2.3}X''-\frac{x^4}{2.3.4}X'''+\ldots\frac{x^5}{2.3.4.5}X''''-$ ec. ovvero, supposta dx costante, onde $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{ddX}{dx}=dX'$, $\frac{dX'}{dx}=X''=\frac{ddX}{dx^2}$ ec., si avrà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2dX}{2.dx}+\frac{x^3ddX}{2.3.dx^2}-\frac{x^4dddX}{2.3.4.dx^3}+$ ec.

Es. Sia $X=\frac{1}{a+x}$, si avrà $\frac{dX}{dx}=\frac{-1}{(a+x)^2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=\ldots\frac{2}{(a+x)^3}$, $\frac{dddX}{dx^3}=\frac{-2.3}{(a+x)^4}$, ec. Dunque $\int Xdx=\int\frac{dx}{a+x}=\ldots\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec. $\ldots+C$, ovvero $l(a+x)=la+\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec., (891).

917. Sia $X=m(a+x)^{m-1}$, onde $\frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque $\int Xdx=(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec

Fatto $x=0$, verrà $C=a^m$, ed $(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec. Facendo $a+x=z$, avremo $z^m=(z-x)^m+mxz^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2z^{m-2}+$ ec., onde $(z-x)^m=z^m(1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}-$ ec. $)$ . . $(z+x)^m=z^m(1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2.z^2}+$ ec. $)$.... $\frac{(z+x)^m}{z^m}=1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}+$ ec. ... e $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}}=\frac{z^m}{(z+x)^m}=1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m+1)x^2}{2.z^2}-$ ec.; dunque se $z+x=b$, avremo $(b-x)^m=b^m(1-\frac{mx}{b-x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}-$ ec.$)$ e $(b+x)^m=b^m(1+\frac{mx}{b+x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}+$ ec. $)$.

918. Sia $X=a^xla$, $\frac{dX}{dx}=a^xl^2a$, $\frac{ddX}{dx^2}=a^xl^3a$ ec., il che dà $\int Xdx=(852)\ a^x=C+a^xxla(1-\frac{1}{2}xla+\frac{1}{2\cdot3}x^2l^2a-$ ec.$)$. Sia $x=0$, si avrà $C=1$, ed $a^x=1+a^xxla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.$)$; dividendo per a^x, verrà $1=a^{-x}+xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec. $)$. Dunque $a^{-x}=1-xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.$)$, e supposta x positiva, le sue potenze impari cangian segno, ed $a^x=1+xla+\frac{x^2l^2a}{2}+$ ec. (307).

919. Se $X=\frac{1}{1+x^2}$, la serie sarà troppo complicata. Pongo dunque $\frac{1}{1+x^2}=u$ onde $-\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}=du$; dunque $\int\frac{dx}{1+x^2}=\int udx=ux-\int xdu=\frac{x}{1+x^2}+\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}$. Pongo $\frac{1}{(1+x^2)^2}=u$ onde $-\frac{4xdx}{(1+x^2)^3}=du$, e fatto $2x^2dx=dz$ onde $\frac{2x^3}{3}=z$, sarà $\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}=\int udz=uz-\int zdu=\frac{2x^3}{3(1+x^2)^2}+\int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3}$. Pongo $\frac{1}{3(1+x^2)^3}=u$ onde $\frac{-6xdx}{3(1+x^2)^4}=du$, e fatto $2.4x^4dx=$

dz onde $\frac{2.4x^5}{5} = z$, sarà $\int \frac{2.4x^4 dx}{3(1+x^2)^3} = \int u dz = uz - \int z du =$ $\frac{2.4x^5}{3.5(1+x^2)^3} + \int \frac{2.4.6x^6 dx}{3.5(1+x^2)^4}$ ec. Dunque $\int \frac{dx}{1+x^2} =$ (850) *Arco* $tang\, x = a = \frac{x}{1+xx} + \frac{2.x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} +$ ec. Dunque in generale poichè $x = tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a}$, sostituendo, e riducendo, si ha $a = cos\, a\,(sen\, a + \frac{2}{3} sen^3 a + \frac{2.4}{3.5} sen^5 a + \frac{2.4.6}{3.5.7} sen^7 a +$ ec. $) = \frac{sen\, 2a}{2}(1 + \frac{2}{3} sen^2 a + \frac{2.4}{3.5} sen^4 a + \frac{2.4.6}{3.5.7} sen^6 a +$ ec.$)$. Se $a = 45°$ e perciò $x = 1$, sarà la circonferenza $8a = \pi =$ $4(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2.3}{3.5.7} +$ ec.$)$.

Integrazione delle Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.

920. Vogliasi $\int X dx l^n x$. Posto $lx = y$ e successivamente $Xdx = dz$, $zdy = du$, $udy = dt$, $tdy = ds$ ec., l' integrazion per parti (916) dà $\int X dx l^n x = y^n z - ny^{n-1} u + n(n-1) y^{n-2} t - n(n-1)(n-2) y^{n-3} s +$ ec. $= l^n x \int X dx - nl^{n-1} x \int \frac{dx}{x} \int X dx + n(n-1) l^{n-2} x \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int X dx - n(n-1)(n-2) l^{n-3} x \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int X dx$ ec. Così se $n = 3$, $X = x^4$, verrà $\int X dx = \frac{x^5}{5}$, $\int \frac{dx}{x} \int X dx = \frac{x^5}{5^2}$ ec., e $\int x^4 dx l^3 x = \frac{x^5}{5}(l^3 x - \frac{3l^2 x}{5} + \frac{6lx}{5^2} - \frac{6}{5^3}) + C$.

921. Se n sia negativa, fatto $lx = y$ e successivamente $d(Xx) = X' dx$, $d(X'x) = X'' dx$ ec., verrà $dx = xdy$, e con lo stesso metodo s' avrà $\int \frac{X dx}{l^n x} = \int \frac{X x dy}{y^n} = - \frac{x}{(n-1) l^{n-1} x}$ $(X + \frac{X' lx}{n-2} + \frac{X'' l^2 x}{(n-2)(n-3)} +$ ec.$) + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}$ $\int \frac{X^{(n-1)} dx}{lx}$. Così se $n = 3$ ed $X = 2x(lx - 1)$, si ha $X' =$ $2x(2lx - 1)$,

$2x(2lx-1)$, $X''=8xlx$, e $\int \frac{2xdx(lx-1)}{l^3x} = \frac{-x}{2l^2x}[2xlx - 2x + 2xlx(2lx-1)] + \frac{1}{2}\int \frac{8xdxlx}{lx} = \frac{x^2}{l^2x} + C$.

922. Debba ora integrarsi l' esponenziale $a^{mx}Xdx$. Posto $a^{mx}dx = dz$, onde $\frac{a^{mx}}{mla} = z$ (852), e fatto successivamente $dX = X'dx$, $dX' = X''dx$ ec., verrà col metodo stesso $\int a^{mx}Xdx = \frac{a^{mx}}{mla}(X - \frac{X'}{mla} + \frac{X''}{m^2l^2a} - \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{m^nl^na}) \mp \ldots \frac{1}{m^{n+1}l^{n+1}a}\int a^{mx}X^{(n+1)}dx$, ove il segno di sopra è per un numero pari n d' apici, ed n è determinata da $X^{(n+1)} =$ *Costante*. Così se $m=3$ ed $X = 3x^2(xla+1)$, si ha $X' = 3x(3xla+2)$, $X'' = 6(3xla+1)$, $X''' = 18la = C$, onde $n+1=3$, $n=2$ e $\int 3a^{3x}x^2dx(xla+1) = \frac{a^{3x}}{3la}[3x^2(xla+1) - \frac{3x(xla+2)}{3la} + \frac{6(3xla+1)}{9l^2a}] - \frac{1}{27l^3a}\int 18a^{3x}dxla = a^{3x}x^3 + C$.

923. Se $a=e$, numero il cui logaritmo iperbolico è 1, si ha $\int e^{mx}Xdx = \frac{e^{mx}}{m}(X - \frac{X'}{m} + \frac{X''}{m^2} - \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{m^n}) \mp \ldots \frac{1}{m^{n+1}}\int e^{mx}X^{(n+1)}dx$. Così se $m=2$, ed $X = 2(a-x)(a-x-1)$, verrà $X' = 2(2x-2a+1)$, $X'' = 4 = C$, onde $n+1=2$, $n=1$ e $\int 2e^{2x}(a-x)(a-x-1)dx = \frac{e^{2x}}{2}[2(a-x)(a-x-1) - 2x + 2a - 1] + \int e^{2x}dx = e^{2x}(a-x)^2 + C$.

924. Sia anche da integrarsi $\frac{a^xdx}{X}$. Poichè $a^x = 1 + xla + \frac{1}{2}x^2l^2a +$ ec. (918), verrà $\int \frac{a^xdx}{X} = \int \frac{dx}{X} + la\int \frac{xdx}{X} + \frac{1}{2}l^2a\int \frac{x^2dx}{X} +$ ec. Onde $\int \frac{e^xdx}{x} = C + lx + x + \frac{x^2}{4} +$ ec.; e se $e^x = z$, si avrà $\int \frac{dz}{lz} = C + llz + lz + \frac{l^2z}{2.2} + \frac{l^3z}{3.2.3} +$ ec.

e poichè $\int \frac{dz}{zlz} = llz$ (860) $= y$, sarà $\int \frac{dz}{lz} = \int z \cdot \frac{dz}{zlz} = \ldots$ $\int zdy = zy - \int ydz = zllz - \int llzdz$, e però $\int llzdz = zllz - \int \frac{dz}{lz} = zllz - C - llz - lz -$ ec.

925. Infine poichè $x^{mx} = 1 + mxlx + \frac{m^2 x^2 l^2 x}{2} +$ ec., sarà $\int x^{mx} dx = \int dx + m \int x dx lx + \frac{m^2}{2} \int x^2 dx l^2 x +$ ec. $=$ (920) $x\left(1 - \frac{mx}{2^2} + \frac{m^2 x^2}{3^3} - \text{ec.}\right) + mx^2 lx\left(\frac{1}{2} - \frac{mx}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{m^2 x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{mx}{4^2} + \frac{m^2 x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) +$ ec. che nel caso di $x = 1$, si riduce ad $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} +$ ec.

Integrazione delle Quantità differenziali ove entrano Seni, Coseni ec.

926. Poichè (859) $\int dx \cos x = \operatorname{sen} x$, e $\int dx \operatorname{sen} x = -\cos x$, sarà $\int dy \cos ny = \frac{\operatorname{sen} ny}{n}$, e $\int dy \operatorname{sen} ny = -\frac{\cos ny}{n}$, $\int dz \times \cos z \operatorname{sen}^n z = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} z}{n+1}$, e $\int dz \operatorname{sen} z \cos^n z = -\frac{\cos^{n+1} z}{n+1}$. Similmente $\int dy \operatorname{sen} y \cos ay =$ (619) $\frac{1}{2} \int dy \operatorname{sen}(a+1)y - \frac{1}{2} \int dy \operatorname{sen}(a-1)y = -\frac{\cos(a+1)y}{2(a+1)} + \frac{\cos(a-1)y}{2(a-1)}$. Sarebbe lo stesso per $dx \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ax$, $dx \cos x \cos ax$ ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ax \cos bx$ ec. riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici per mezzo dei valori di $\operatorname{sen} a \cos b$, $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ ec.: ma per integrar $dx \operatorname{sen}^2 x$, $dx \operatorname{sen}^3 x$ ec. è preferibile il metodo seguente.

927. Vogliasi $\int dx \operatorname{sen}^n x$. Fatto $\operatorname{sen} x = y$, onde $dx = dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int dx \operatorname{sen}^n x = \int y^n dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ o a $\int dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = arc. \operatorname{sen} y = x$ se n è pari, o a $\int ydy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\cos x$ se n è impari, e restituiti quindi i valori,

ho $\int dx\, sen^n x = -\frac{\cos x}{n}\,(sen^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} sen^{n-3} x + \ldots$ $\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} sen^{n-5} x + \text{ec.}) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}\, x$ presi $\frac{n}{2}$ termini se n è pari, e $-\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1} \cos x$, presi $\frac{n-1}{2}$ termini se n è impari. Così $\int dx\, sen^6 x = C - \frac{\cos x}{6}(sen^5 x +$ $\frac{5}{4} sen^3 x + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2} sen\, x) + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\, x$: e $\int dx\, sen^5 x = C - \ldots$ $\frac{\cos x}{5}(sen^4 x + \frac{4 sen^2 x}{3} + \frac{4\cdot 2}{3})$.

928. Facciasi $x = 90^\circ - z$; avremo $dx = -dz$, $sen\, x = \cos z$, $\cos x = sen\, z$, e $\int dz \cos^n z = \frac{sen\, z}{n}(\cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n-2} \times$ $\cos^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \cos^{n-5} z + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} \times \ldots$ $\cos^{n-7} z + \text{ec.}) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}\, z$ se n è pari; e se è impari, $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1} sen\, z$, presi i termini come sopra. Per esempio, $\int dy \cos^5 y = C' + \frac{sen\, y}{5}(\cos^4 y + \frac{4}{3}\cos^2 y + \frac{4\cdot 2}{3\cdot 1})$; e $\int dy \cos^6 y = C + \frac{1}{6} sen\, y(\cos^5 y + \frac{5}{4}\cos^3 y + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}\cos y) +$ $\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\, y$.

929. Vogliasi anche $\int dy\, sen^m y \cos^n y$. Fatto $\cos y = x$, onde $dy = -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int dy\, sen^m y \cos^n y = -$ $\int x^n dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ o a $-\int dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \int dy\, sen^m y$ se n è pari, o a $\int x dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \frac{sen^{m+1} y}{m+1}$ se n è impari: e restituiti i valori, ho $\int dy\, sen^m y \cos^n y = C + \ldots$ $\frac{sen^{m+1} y}{m+n}(\cos^{n-1} y + \frac{(n-1)\cos^{n-3} y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\cos^{n-5} y}{(m+n-2)(m+n-4)} +$

ec.) $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2} \int dy\, sen^m y$ se n è pari, e se è impari $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\, sen^{m+1} y}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+1}$, presi i termini come sopra (927).

930. Facciasi $y = 90° - z$; avremo $\int dz \cos^m z\, sen^n z = C - \frac{\cos^{m+1} z}{m+n} \left(sen^{n-1} z + \frac{(n-1)\, sen^{n-3} z}{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(n-1)(n-3)\, sen^{n-5} z}{(m+n-2)(m+n-4)} + \text{ec.} \right) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1 \int dz \cos^m z}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2}$ (928) se n pari, e $- \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\cos^{m+1} z}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+1}$ se n è impari.

Per esempio, la prima formula dà $\int dy \cos^3 y\, sen^5 y = C + \frac{1}{8} sen^6 y (\cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8} sen^6 y (\frac{4}{3} - sen^2 y)$, e la seconda $\int dy \cos^3 y\, sen^5 y = C - \frac{1}{8}\cos^4 y (sen^4 y + \frac{2}{3} sen^2 y + \frac{1}{3})$. Bisogna dunque che i due risultati siano eguali, o differiscan solo d' una quantità costante, che nel caso nostro è $\frac{1}{24}$, riducendo tutto in seni e osservando che $\cos^4 = (1 - sen^2)^2$.

931. Consideriamo ora i rotti nei quali entrano seni ec.: 1°. $\int \frac{dy}{sen\, y} = \int \frac{dy}{2 sen \frac{1}{2} y \cos \frac{1}{2} y}$ (621) $= \int \frac{\frac{1}{2} dy}{\cos^2 \frac{1}{2} y\, tang \frac{1}{2} y} = l\, tang \frac{1}{2} y$ (849. 851). Fatto $y = 90° - z$, avremo 2°. $\int \frac{dz}{\cos z} = -\, l\, tang (45° - \frac{z}{2}) = -\, l \cot (45° + \frac{z}{2})$ (613. 3°.) $= l\, tang (45° + \frac{z}{2})$ (610): 3°. $\int \frac{dy \cos y}{sen\, y} = \int \frac{d(sen\, y)}{sen\, y} = l\, sen\, y = \int dy \cot y$: 4°. $\int \frac{dy\, sen\, y}{\cos y} = \int \frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -\, l \cos y = l \sec y = \int dy\, tang\, y$: 5°. $\int \frac{dy}{sen\, y \cos y} = \int \frac{dy}{\cos^2 y\, tang\, y} = l\, tang\, y$..

932. Posto ciò, cerco $\int \frac{dy}{sen^m y}$. Fatto $sen\, y = x^{-1}$, onde

$dy = -x^{-2} dx (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int \frac{dy}{sen^m y} = - \ldots$ $\int x^{m-1} dx (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ o a $-\int x dx (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dy}{sen^2 y} =$ $-cot\, y$ (850) se m è pari, o a $-\int dx (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \ldots$ $\int \frac{dy}{sen\, y} = l\, tang \frac{1}{2} y$ (931) se m è impari, e restituiti quindi i valori, ho $\int \frac{dy}{sen^m y} = -\frac{cos\, y}{m-1} \left(\frac{1}{sen^{m-1} y} + \frac{m-2}{(m-3)\, sen^{m-3} y} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)\, sen^{m-5} y} + \text{ec.} \right) - \frac{(m-2)(m-4) \ldots 2 cot\, y}{(m-1)(m-3) \ldots 1}$ presi $\frac{n-2}{2}$ termini se m è pari; e se è impari, $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} \times l\, tang \frac{1}{2} y$, presi $\frac{n-1}{2}$ termini.

933. Suppongasi $y = 90° - z$, e sarà $\int \frac{dz}{cos^m z} = \frac{sen\, z}{m-1} \left(\frac{1}{cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{(m-3)\, cos^{m-3} z} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)\, cos^{m-5} z} + \text{ec.} \right) + \frac{(m-2)(m-4) \ldots 2\, tang\, z}{(m-1)(m-3) \ldots 1}$ se m è pari; e se è impari, $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} l\, tang (45° + \frac{z}{2})$ (931), presi i termini come prima. Per esempio $\int \frac{dy}{cos^7 y} = \frac{sen\, y}{6} \left(\frac{1}{cos^6 y} + \frac{5}{4\, cos^4 y} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot cos^2 y} \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} l\, tang (45° + \frac{y}{2})$.

934. E' dunque facile integrar la formula $\frac{dy\, cos^m y}{sen^n y}$; poichè se $m = 2k + 1$, si ha $\frac{dy\, cos^{2k+1} y}{sen^n y} = \frac{d(sen\, y)}{sen^n y} (1 - sen^2 y)^k$, che fatto $sen\, y = z$, diventa $z^{-n} dz (1 - z^2)^k$ integrabile, giacchè quì k è numero intero e positivo (858). Se $m = 2k$, allora $\frac{dy\, cos^{2k} y}{sen^n y} = \frac{dy (1 - sen^2 y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s' integrerà per mezzo della formula $\int \frac{dy}{sen^n y}$ (932). Lo stesso

satebbe per $\int \frac{dy\, sen^m y}{cos^n y}$ e $\int \frac{dy}{sen^m y\, cos^n y}$.

Integrazione delle Differenziali a più Variabili.

935. Se T sia una funzione di più variabili x, y, z ec., le differenze $d^x\,T$ di T per x, $d^y\,T$ di T per y, $d^z\,T$ di T per z ec., le quali si hanno facendo variar solamente o x o y o z ec, si chiamano *differenze parziali* di T: ed all'incontro le somme $\int^x Tdx, \int^y Tdy, \int^z Tdz$ ec. che si hanno integrando per x o per y o per z ec., cioè considerando come variabile la sola x, la sola y, la sola z ec., posson dirsi *somme parziali* di T. Tale è la notazione che adottiamo per le differenze parziali; ella ci sembra più espressiva e meno equivoca di quante ne sono in uso tra gli Scrittori, i più dei quali indicano con $\frac{dT}{dx}dx$, $\frac{dT}{dy}dy$, $\frac{dT}{dz}dz$ ec. ciò che noi intendiamo per $d^x\,T, d^y\,T, d^z\,T$ ec. Si osservi intanto, come per principio fondamentale di simili differenze, che supposto $T = \varphi(x, y)$ (821), sarà $d^x T = \varphi(x+dx, y) - T$ (826) e $d^y d^x T = \varphi(x+dx, y+dy) - d^y T - d^x T$: parimente $d^y T = \varphi(x, y+dy) - T$ e $d^x d^y T = \varphi(x+dx, y+dy) - d^x T - d^y T$; dunque $d^y d^x T = d^x d^y T$.

936. Data pertanto una differenziale $Pdx + Qdy$ a due variabili in cui P, Q son funzioni di x, y, se T ne sia l'integrale, avremo $dT = Pdx + Qdy$; dunque supponendosi x, y indipendenti l'una dall'altra, si potranno formar le particolari equazioni $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$: e poichè $d^y d^x T = dx d^y P$, $d^x d^y T = dy d^x Q$ e $d^y d^x T = d^x d^y T$ (935), sarà $dx d^y P = dy d^x Q$ e $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$, cioè *una differenziale* $Pdx + Qdy$ *sarà esatta o potrà integrarsi, se la differenza parziale di* P *per* y *divisa per* dy *eguagli quella di* Q *per* x *divisa per* dx.

Dunque 1°. giacchè $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$, sarà $d^x T + d^y T = Pdx + Qdy = dT$, e in generale da V, funzione di x, y,

si ha sempre $d^x V + d^y V = dV$: 2°. se varj la sola x e poi la sola y, sarà I^a. $T = \int^x Pdx + C$, II^a. $T = \int^y Qdy + C'$ e potrà esser $C = \varphi(y)$, $C' = \varphi(x)$: 3°. le due espressioni $\int^x Pdx, \int^y Qdy$ avranno *comuni* tutti i termini ove si trova xy; onde i termini *non comuni* in quelle espressioni conterranno x senza y in $\int^x Pdx$, ed y senza x in $\int^y Qdy$ (833): 4°. poichè dalla I. equazione si ha $d^y T (= Qdy) = d^y \int^x Pdx + dy\varphi'(y)$ (853), dalla II. $d^x T (= Pdx) = d^x \int^y Qdy + dx\varphi'(x)$, sarà (860) $\varphi(y) = \int (Qdy - d^y \int^x Pdx)$, $\varphi(x) = \int (Pdx - d^x \int^y Qdy)$ e perciò III. $T = \int^x Pdx + \int (Qdy - d^y \int^x Pdx)$, IV. $T = \int^y Qdy + \int (Pdx - d^x \int^y Qdy)$.

937. Per render più comode queste integrali, chiamo S i termini *comuni* o simili, e D, D' i *non comuni* o dissimili in $\int^x Pdx, \int^y Qdy$ (936 . 3°.), onde $\int^x Pdx = S + D$, $\int^y Qdy = S + D'$. Sostituiti questi valori nella somma della III. e IV. equazione, verrà $2T = D + D' + 2S + \int (Pdx + Qdy) - \int (d^y D + d^y S + d^x D' + d^x S)$: ma $\int (Pdx + Qdy) = T$, $d^y S + d^x S = dS$ (936. 1°.), $d^y D = 0$, $d^x D' = 0$ (936. 3°.); dunque $T = D + D' + S$, cioè *l'integrale d'una differenziale esatta* $Pdx + Qdy$ *si ha dalle somme parziali di* Pdx *per* x *e di* Qdy *per* y, *presi una sola volta i termini simili*. Così giacchè la differenziale $(3x^2 + 2bxy - 3y^2)dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2)dy$ è esatta, trovandosi $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx} = 2bx - 6y$, integro $3x^2dx + 2byxdx - 3y^2dx$ per x e viene $x^3 + byx^2 - 3xy^2$; integro $bx^2dy - 6xydy + 3cy^2dy$ per y ed ho $bx^2y - 3xy^2 + cy^3$: onde $T = D + D' + S = x^3 + byx^2 - 3y^2x - cy^3 + C$. Ma poichè talora è necessaria qualche sostituzione per giunger più facilmente all' integrali, ne porremo qui varj esempj.

I. $\int \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$: fatto $\frac{y}{x} = z$, si ha $\int \frac{x^2dz}{(x - zx)^2} = \int \frac{dz}{(1-z)^2}$.

II. $\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$: fatto $\frac{x}{y} = z$, si ha $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$.

III. $\int \frac{3xdx + ydx - xdy - 3ydy + 2dy\sqrt{a}\sqrt{(x+y)}}{2\sqrt{(x+y)}}$: fatto $\sqrt{(x+y)} = z$, si ha $\int [(2z - \sqrt{a})dx + (2x - 3z^2 + 2z\sqrt{a})dz]$.

IV. $\int \frac{3(a+y)(3xdy + dx) + xdylx}{3x\sqrt[3]{(a+y)^2}}$: fatto $\sqrt[3]{(a+y)} = z$, si ha $\int (zx^{-1}dx + dzlx + 9z^1dz)$.

V. $\int \frac{-(5xy + 6y^2)dx - (5xy + 6x^2)dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x + y = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $dx + dy = 2zdz$, moltiplico la I. per la IV. e la II. per la III. ed ho $xydx + xydy = 2pzdz$, ed $x^2dy + xydx + xydy + y^2dx = z^2dp$; dunque $5xydx + 5xydy = 10pzdz$ e $6x^2dy + 6y^2dx = 6z^2dp - 12pzdz$; sommate queste due equazioni, la data integrale diviene $\int (p^{-3}dz - 3zp^{-4}dz)$.

VI. $\int \frac{a(x^3dy + y^3dx)}{(x^2 + y^2)\sqrt{(a^2x^2 + a^2y^2 - x^2y^2)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x^2 + y^2 = z^2$ onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx + ydy = zdz$, moltiplico come sopra ed ho $x^2ydx + xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx + xy^2dy + y^3dx = z^2dp$; dunque sottratte queste due equazioni, la data diviene $\int \frac{a(zdp - pdz)}{z\sqrt{(a^2z^2 - p^2)}}$, ove fatto $\frac{p}{z} = u$, si ha $\int \frac{adu}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}$.

VII. $\int \frac{(2x^2y - y^3)dx + (x^3 - 2xy^2)dy}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x^2 - y^2 = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx - ydy = zdz$, moltiplico al solito ed ho $yx^2dx - xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx - xy^2dy - y^3dx = z^2dp$; dunque sommando queste due equazioni, la data diviene $\int (pdz + zdp)$.

938. Data una differenziale a tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz$, e chiamata la sua integrale T, sarà $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$, $d^z T = Rdz$; dunque (936) perchè la differenziale sia completa o possa integrarsi, bisogna che sia $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$, $\frac{d^z P}{dz} = \frac{d^x R}{dx}$, $\frac{d^z Q}{dz} = \frac{d^y R}{dy}$.

939. Avve-

939. Avverandosi queste condizioni, *l' integrale* $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{D}' + \mathrm{D}'' + \mathrm{S}$ *si otterrà integrando* $\mathrm{P}dx$ *per* x, $\mathrm{Q}dy$ *per* y, $\mathrm{R}dz$, *per* z, *presi tutti i termini diversi e una sola volta i simili* (937).

Così poichè in $(2y^2x + 4bz^2x^3)\,dx + \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)}} + 3y^2 + 2x^2y\right)dy + \left(4z^3 + 2bx^4z + \frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)dz$ si avverano le tre condizioni, viene $\int^x \mathrm{P}dx = y^2x^2 + bz^2x^4$, $\int^y \mathrm{Q}dy = \sqrt{(y^2 + z^2)} + y^3 + x^2y^2$, $\int^z \mathrm{R}dz = z^4 + bx^4z^2 + \sqrt{(y^2+z^2)}$, onde $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{D}' + \mathrm{D}'' + \mathrm{S} = y^2x^2 + bz^2x^4 + \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + z^4 + \mathrm{C}$. Così si trovan le condizioni per le differenziali di un più gran numero di variabili, e si integra quando hanno luogo.

940. Data ora la differenziale del second' ordine $\mathrm{P}d^2x + \mathrm{Q}dx^2$ ove P, Q son funzioni di x, prendo quella del primo $\mathrm{P}dx$, la cui differenziale è $\mathrm{P}d^2x + dxd\mathrm{P}$; dunque paragonando la data con questa, verrà $\mathrm{Q}dx = d\mathrm{P}$, equazione che avverandosi dà $\int(\mathrm{P}ddx + \mathrm{Q}dx^2) = \mathrm{P}dx$. Così $mx^{m-1}ddx + m(m-1)x^{m-2}dx^2$ è integrabile, poichè $d\mathrm{P} = m(m-1)x^{m-2}dx = \mathrm{Q}dx$, e l' integrale è $mx^{m-1}dx$, che nuovamente integrata dà $x^m + \mathrm{C}$.

941. Con dx costante la differenziale è $\mathrm{Q}dx^2$, onde $\int \mathrm{Q}dx^2 = dx\int \mathrm{Q}dx +$ la costante $\mathrm{C}dx$. Per esempio $\int dx^2(1 - x^2) = dx\int(dx - x^2dx) = dx\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + \mathrm{C}dx$, e nuovamente integrando, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{C}x + \mathrm{C}'$.

942. Data la differenziale del terz' ordine $\mathrm{R}d^3x + \mathrm{S}dxd^2x + \mathrm{T}dx^3$, prendo quella del secondo $\mathrm{P}d^2x + \mathrm{Q}dx^2$, che differenziata dà $\mathrm{P}d^3x + (d\mathrm{P} + 2\mathrm{Q}dx)\,d^2x + d\mathrm{Q}dx^2$, ed ho $\mathrm{R} = \mathrm{P}$, $\mathrm{S}dx = d\mathrm{P} + 2\mathrm{Q}dx$, $\mathrm{T}dx = d\mathrm{Q}$ e perciò $\mathrm{Q} = \int \mathrm{T}dx + \mathrm{C}$. Sostituiti i valori di P, Q nella seconda equazione, sarà $\frac{\mathrm{S}}{2} - \frac{d\mathrm{R}}{2dx} - \int \mathrm{T}dx = \mathrm{C}$, equazione che avverandosi dà l' integrale $\mathrm{R}ddx + dx^2(\int \mathrm{T}dx + \mathrm{C})$. Per esempio $x^2d^3x + 2x^3dxddx + (3x^2 - 1)\,dx^3$ ha la condizione necessaria, e l' integrale è $x^2ddx + dx^2(x^3 - x + \mathrm{C})$.

943. Se dx è costante, si avrà l'integrale $dx^2(\int Tdx + C)$; dunque integrando, $dx\int(dx\int Tdx + C) + C'dx$, e di nuovo integrando, $\int(dx\int dx\int Tdx + C) + C'x + C''$. Così $dx^2\int x^m dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. Nel modo stesso si trovano le condizioni e le integrali di differenziali più elevate.

944. Sia la differenziale del second' ordine a due variabili $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$. Prendo la differenziale di $Adx + Bdy$, nella quale A e B son funzioni qualunque di x, y, ed ho $Addx + Bddy + dAdx + dBdy$, che fatto $dA = d^x A + d^y A$, $dB = d^x B + d^y B$, diviene $Addx + Bddy + \frac{d^x A}{dx} . dx^2 + \left(\frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx}\right) dxdy + \frac{d^y B}{dy} . dy^2$; onde $P = A$, $Q = B$, e perciò $R = \frac{d^x P}{dx}$, $S = \frac{d^y P}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, e $T = \frac{d^y Q}{dy}$. Verificandosi queste condizioni; l'integrale sarà $Pdx + Qdy$: tanto avviene in $yddx - xddy$ il cui integrale è $ydx - xdy$.

945. Con dx costante, dovrà integrarsi $Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$; che nascendo come prima da $Adx + Bdy$, darà $Q = B$, $R = \frac{d^x A}{dx}$, $S = \frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, $T = \frac{d^y Q}{dy}$; dunque $d^x A = Rdx$, $A = \int^x Rdx + \phi(y)$; ove essendo $d^y A \left(= Sdy - \frac{d^x Qdy}{dx}\right) = d^y \int^x Rdx + dy\phi'(y)$; verrà $\phi(y) = \int\left(Sdy - \frac{d^x Qdy}{dx} - d^y \int^x Rdx\right)$; e le condizioni per integrare saranno $S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y(\int^x Rdx + \phi(y))}{dy}$, $T = \frac{d^y Q}{dy}$; onde l'integrale $Adx + Bdy$ diverrà $dx\int^x Rdx + dx\,\phi(y) + Qdy + Cdx$. Per esempio $(ax + x^2)ddy + ydx^2 + (3x + 2y + a)dxdy$, presa dx costante, ha le condizioni prescritte, e l'integrale è $(xy + y^2 + C)dx + (ax + x^2)dy$. Nel modo stesso si trovan le condizioni per più di due variabili.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE.

Le applicazioni del Calcolo Integrale si estendono a tutte le parti delle Matematiche; ma noi ci limiteremo a quelle che son puramente geometriche e che servon di fondamento all' altre (840).

Quadratura delle Curve.

946. Sia la curva AM con le coordinate $AP = x, PM = y$ e vogliasi la quadratura dello spazio $AMP = Q$. Condotta l'ordinata mp e la Mr parallela a Pp, sarà $Pp = Mr = \delta x, rm = \delta y$, e lo spazio $MmpP = (y + \frac{1}{2}\delta y)\,\delta x$, onde $\frac{\delta Q}{\delta x} > y + \frac{1}{2}\delta y$: dunque presi i limiti (838) o fatto $\delta y = 0$ (836), verrà $dQ = ydx$ e $Q = AMP = \int ydx + C$, onde $AMQ = \int xdy + C$: ove si noti 1°, che se le coordinate facciano un angolo obliquo $P = \phi$, sarà (644) $AMP = sen\,\phi \int ydx + C$: 2°. che per integrar queste formule deve y esser data per x o x per y. 180.

947. Es. I. Sia un quadrante di circolo descritto col centro A e col raggio a: si avrà $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ e $\int ydx = AQMP = \int dx \sqrt{(aa - xx)} + C = C + ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{1.x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} - \frac{1.3.5x^9}{2.4.6.8.9a^7} -$ ec. (161). Fatto $x = 0$, sarà $AQMP = 0$, e però $C = 0$; dunque $AQMP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} -$ ec. 181.

II. Nell' ellisse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; dunque $\int ydx = \ldots\ldots$ $\frac{b}{a}(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} -$ ec.).

III. Nella parabola, $ydx = dx\sqrt{px}$ e $\int ydx = \frac{2x}{3}\sqrt{px} =$ 180.

180. $\frac{2}{3}xy$. L'equazione alle parabole di tutti i gradi è $y^m = x^n a^{m-n}$; dunque $mly = nlx + (m-n)la$, $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$ ed $m:n :: ydx : xdy :: \int ydx : \int xdy$ :: AMP : AMQ: onde lo spazio AMP sta al rettangolo circoscritto APMQ :: $m : m+n$.

IV. Nell' iperbola equilatera, $xy = aa$ ed $ydx = \frac{aadx}{x}$; dunque $\int ydx = aalx + C$. Se si voglion prendere gli spazj dall' origine A, lo spazio sarà = o quando $x = o$; dunque $C = -aalo = \infty$ (308), e lo spazio Q'APMN $= aalx - aalo = \infty$. Se $x =$ AD $= a$, allora lo spazio Q'ADBN $= aala - aalo$; dunque BDPM $= aalx - aala = aal\frac{x}{a}$. Quindi se la potenza $a^2 = 1$, sarà BDPM $= lx$, logaritmo naturale dell' ascissa AP $= a + x$: ed ecco perchè chiamansi iperbolici i logaritmi del modulo 1 (302).

182.

V. Nella cicloide AEB', $xdy = dx\sqrt{(2ax - x^2)}$ (873) e $\int xdy$ (= ACR) (946) $= \int dx\sqrt{(2ax - x^2)} =$ ALQP' (873. 946); dunque tutto lo spazio AED eguaglia tutto il semicircolo AQB', onde lo spazio cicloidale è triplo del circolo genitore.

172.

VI. Nella cissoide, $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ (787) e $\int ydx =$ AKMPA $= \int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} =$ ACONP (I); e se si riduca $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (905) $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax-xx)^{\frac{1}{2}}$, ovvero APMKA = 3ACONP − 4ANP = 3ACONA − ANP. Dunque poichè quando $x = a$, il triangolo ANP svanisce e il segmento ACONA si cangia nel semicircolo ACNB, lo spazio infinitamente lungo MKABQ è triplo del semicircolo genitore.

183.

VII. Nella logaritmica, $ydx = Ady$ (862), e $\int ydx =$ BAPM $= Ay + C$: ma quando $y = 1 =$ AB, lo spazio ABMP diventa nullo; dunque $C = -A$, e ABMP $= A(y - 1) =$

184.

FIG.

al rettangolo OIQM. Se si fa $y=0$, si avrà lo spazio infinitamente lungo BXYA $= -A =$ al rettangolo PQIT. 184.

VIII. Sia una curva BM che abbia per equazione $y = x^x$; si avrà (925) lo spazio ABMP $=\int x^x dx = x\left(1-\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{4^4}+ \text{ec.}\right)+xxlx\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{4^3}-\text{ec.}\right)+\frac{x^3l^2x}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{4^2}+\frac{x^2}{5^3}-\text{ec.}\right)+\text{ec.}$ Se $x=\text{AP}=\text{PM}=1$, lo spazio ABMP $= 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^6}+\text{ec.} = 0{,}783430$ 510712 ec. 185.

IX. Sia la curva dei seni AMA'M' ec. la cui equazione è $x = arc\ sen\ y$ ovvero $y = sen\ x$; si avrà APM $= \int dx\, sen\, x = C - cos\, x$. Faccio $x=0$, sarà $C=1$, APM $= 1-cos\, x$. Sia $x=180°=c$, si avrà AMA' $=2$, doppio del quadrato del raggio. Se $x = 2c =$ AA'', si avrà lo spazio AMA'A $+$ A'M'A''A' $=0$, il che è chiaro, poichè l' uno è positivo e l' altro negativo. In generale se $x = 2kc$, lo spazio sarà zero; e se $x=(2k+1)c$, lo spazio sarà $=2$. Posta l' origine degli x nel punto A, medio di A'A', la retta x diverrà $\frac{1}{2}c - x = 90° - x$, e si avrà $y = cos\, x$; onde lo spazio ABMP $= sen\, x$, lo spazio ABA'A $=1$, e A'MBA'A $=$ 0, o non attendendo alle sue due parti positiva e negativa, A'MBA'A $=2$. 186. 187.

X. Nella curva CE a doppia curvatura volendo lo spazio CEF (parte della superficie curva CDEF normalmente alzata sulla curva CD (802)) essendo al solito CF $= x$, si ha $y = s = \int\sqrt{(dy^2+dz^2)}$ (802); dunque $\int ydx$ diverrà $\int dx \int\sqrt{(dy^2+dz^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2=px$, $(y^2+2p^2)^3 = 9p^4z^2$, verrà $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dz^2 = \frac{(y^2+2p^2)y^2dy^2}{p^4}$, $\sqrt{(dy^2+dz^2)} = \frac{dy}{p^2}(p^2+y^2)$, $\int\sqrt{(dy^2+dz^2)} = y+\frac{y^3}{3p^2}$, e $\int dx\sqrt{(dy^2+dz^2)} = \int\left(\frac{2y^2dy}{p}+\frac{2y^4dy}{3p^3}\right) = \frac{2y^3}{3p}+\frac{2y^5}{15p^3}$ senza costante, perchè $y=0$ dà lo spazio $=0$. 193.

948. Se l' ordinate partono da un punto fisso C, il rettangolo pPMr di prima (946) diventa un triangolo CMr, e 188.

188. quindi lo spazio COMC $= \frac{1}{2}\int y dx + C$. Sia φ l' angolo che fa CM con una retta fissa CA; avremo $Mr = y d\varphi$ (644.628), e COMC $= \frac{1}{2}\int y^2 d\varphi + C$,

189. Esempio I. Sia la concoide AM, il suo polo P, PM $= y$, QM $= a$, PB $= b$, e l' angolo APM $= \varphi$; si avrà (647) PQ $= \frac{b}{\cos\varphi}$, ed $y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$; dunque lo spazio APM $= \frac{b^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm ab\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a^2}{2}\int d\varphi = \frac{b^2 tang\,\varphi}{2} \pm ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ (931) $+ \frac{1}{2}a^2\varphi$ senza costante; dunque poichè PBQ $= \frac{1}{2}b^2 tang\,\varphi$ (643), sarà $\pm$APM$\mp$PBQ$=$ABQM$= ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \pm \frac{1}{2}a^2\varphi$, ed AAMM $= 2ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.

183. II. Nella cissoide se si fa AB $= a$, AM $= y$, MAB $= \varphi$, sarà AQ $= \frac{a}{\cos\varphi}$ (649), AO $=$ MQ $= a\cos\varphi$ (645), AP $= y\cos\varphi$, PM $= y\, sen\,\varphi$, $y = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi$, ed $y^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - 2a^2 + a^2\cos^2\varphi$; dunque AKMOA $= \frac{a^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - a^2\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int d\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{2}a^2(tang\,\varphi + \frac{1}{4}sen\,2\varphi - \frac{3}{2}\varphi)$ (928). Dunque AKMPA $=$ AMP $(= \frac{1}{2}y^2 sen\,\varphi\cos\varphi) -$ AKMOA $= \frac{1}{2}a^2(\frac{3}{2}\varphi - \frac{5}{4}sen\,2\varphi + sen\,\varphi\cos^3\varphi)$. Ma $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{4}sen\,4\varphi + sen^3\varphi \times \cos\varphi$ (633) $= \frac{1}{4}sen\,4\varphi + sen\,\varphi\cos\varphi - sen\,\varphi\cos^3\varphi$ (610) e però $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}sen\,4\varphi + sen\,2\varphi)$; dunque AKMPA $= \frac{1}{2}a^2(\frac{3}{2}\varphi - sen\,2\varphi + \frac{1}{8}sen\,4\varphi)$. Fatto $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ (521); si ha $sen\,2\varphi = 0 = sen\,4\varphi$ (611), è poichè $\frac{1}{4}a^2\varphi$ è il semicircolo AONB (520), sarà lo spazio infinitamente lungo MKABQ $= \frac{3}{4}a^2\varphi =$ 3AONB.

188. III. Nella spirale d' Archimede, AGFBN $= x$, AGFBA $= c$, CM $= y$, CA $= a$, $Mr = \frac{y dx}{a}$, d(COMC) $= \frac{Mr.CM}{2}$ (948) $= \frac{y^2 dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$ (797), $dx = \frac{c dy}{a}$; dunque COMC $= \frac{cy^3}{2.3a^2}$ senza

FIG.

costante; onde fatto $y = a$, lo spazio COMAC $= \frac{ac}{2.3} =$ al terzo di tutto il circolo. 188.

Non si è preso quì l' integrale $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi$ perchè questo non può estendersi al di là di $\varphi = 360^\circ$, altrimenti i triangoli elementari $\frac{1}{2}y^2 d\varphi$ conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari compresi tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria $\int y dx$ se più ordinate corrispondano alla ascissa.

[illegible]. Nella spirale iperbolica scemando x mentre cresce [illegible], sarà CN (a) : Nn $(-dx)$ :: CM (y) : M$r = -\frac{ydx}{a}$; dunque [illegible]C $= \frac{1}{2}\int \frac{-y^2 dx}{a}$: ma $xy = ab$ (800), e però $-ydx =$ [illegible] $= \frac{[illegible]dy}{y}$; dunque $-\frac{y^2 dx}{a} = bdy$, e lo spazio compreso tra la curva e due ordinate $= \frac{1}{2}by + C$. 190.

[illegible]. Questo metodo può applicarsi anche alle curve che han l' ordinate parallele. Vogliasi per esempio la quadratura del settor parabolico AFM. Fatto l' angolo AFM $= \beta = 2\varphi$ e perciò FM $= y = \frac{\frac{1}{4}p}{\cos^2\varphi}$ (751), sarà $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi = \frac{p^2}{16}\int \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} =$ 128.

$$(933)\ \frac{p^2}{16}\Big[\frac{1}{3}\, sen\,\varphi\Big(\frac{1}{\cos^3\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\Big)\Big] = \frac{p^2}{16}\Big[\frac{1}{3}\, tang\,\varphi\Big(\frac{1}{\cos^2\varphi} + 2\Big)\Big]$$

$= (610)\ \frac{1}{16}p^2\left(\frac{1}{3}tang^3\varphi + tang\,\varphi\right)$ senza costante se il settore cominci dal punto A.

Quindi (sia detto quì di passaggio) in due parabole AM, A′M′ col fuoco ed asse medesimo e coi parametri p, p', i settori AFM, A′FM′ compresi tra due raggi vettori comuni, saran tra loro :: $p^2 : p'^2$ :: FM^2 : FM$'^2$ :: $x^2 : x'^2$ ec. (751). 117.

Rettificazione delle Curve.

949. Poichè (861) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, sarà l' arco AM $= s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$ o l' ordinate sieno parallele o partano da un punto fisso. 191.

181. 950. Es. I. Nel circolo, $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, $dy^2=\frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$, $dx^2+dy^2=\frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}$, e $QM=s=\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(915)\ x+\frac{x^3}{2.3a^2}+\frac{1.3x^5}{2.4.5a^4}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6}+$ ec.; dunque l'arco $MB=y+\frac{y^3}{2.3a^2}+\frac{1.3y^5}{2.4.5a^4}+$ ec. (629).

180. II. Nella parabola, $AM=\int dy\sqrt{(1+\frac{4y^2}{p^2})}=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}=(914)\ C+\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}+\frac{p}{4}l[y+\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}]$. Facciamo $y=0$, e sarà $C=-\frac{p}{4}l\frac{p}{2}$; dunque $AM=\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}+\frac{p}{4}l2\left[\frac{y+\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}}{p}\right]$.

191. 951. Può osservarsi che se col centro A e col semiasse maggiore $BA=\frac{1}{2}p$ si descrive un'iperbola equilatera BN', lo spazio ABN'Q sarà $\int xdy$ (946) $=\int dy\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$ (768); dun-

180. que $AM=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}=\frac{2}{p}\times ABN'Q$ e però $AM\times\frac{1}{2}p=ABN'Q$; onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell' iperbola e reciprocamente*.

192. III. Nell' ellisse, supposto il semiasse maggiore $=1$, sarà $y^2=b^2(1-x^2)$, e fatto $1-b^2=c^2$ (746), si ha $BM=\int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}$, integrale che non può aversi con le regole precedenti. Bisogna dunque ridurre in serie: ma per maggior semplicità riducendo solamente $\sqrt{(1-c^2x^2)}$, avremo

$$BM=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1-\frac{c^2x^2}{2}-\frac{c^4x^4}{2.4}-\frac{1.3c^6x^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5c^8x^8}{2.4.6.8}-\text{ec.}\right)=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{c^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{c^4}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\dots\frac{1.3c^6}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\text{ec.}$$

Ora riducendo le integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (903) fatto $k=-\frac{1}{2}$, $m=2$, $a=1$, $b=-1$, $n=2,4,6$, ec., $i=1,2$, ec., $p=0$, si avrà

avrà $BM = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}$ — ec.) 192.
$\int \frac{dx}{\surd(1-x^2)} + c^2 x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} +$ ec.]
$+ c^4 x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2}$ + ec.]: ma
$DN = \int \frac{dx}{\surd(1-x^2)}$ (950. I.); dunque son note tutte le quantità di questa serie di cui è facile conoscer la legge.

Sia $x = 1$; si avrà $AMB = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2}$ — ec.) AND. Dunque la periferia dell'ellisse è a quella del circolo circoscritto :: $1 - \frac{1}{2^2} . \frac{c^2}{a^2} - \frac{1.1^2}{2^2.4^2} . \frac{3c^4}{a^4} - \frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} . \frac{5c^6}{a^6}$ — ec.: 1 (supposto a il semiasse maggiore). Questa serie sarà convergentissima quando i fuochi saran vicini. Per esempio se $c = \frac{1}{10} a$, la circonferenza dell'ellisse sarà a quella del circolo circoscritto :: 0,997 495 292 861 261 : 1.

La rettificazion dell'iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve l'integrali d'un gran numero d'altre differenziali.

IV. Nella seconda parabola cubica, $y^3 = ax^2$; dunque $s = \int dy \surd (1 + \frac{9y}{4a}) = \frac{8}{27} a (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C$ (858); fatto $y = 0$, si ha $C = -\frac{8}{27} a$ e l'arco preso dall'origine $= \frac{8}{27} a [(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - 1]$ (872).

V. Nella cicloide, $dy = dx \surd (\frac{a-x}{x})$ (873) preso $AB = a$; dunque $s = \int dx \surd \frac{a}{x} = 2\surd ax = 2AN$ (874). 193.

VI. Nella logaritmica, $ydx = ady$, $s = \int \frac{dy}{y} \surd (y^2 + a^2)$; se $\surd (y^2 + a^2) = z$, si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{z^2 - a^2}$ ed $s = \int \frac{z^2 dz}{z^2 - a^2} = z + \frac{a}{2} l \frac{z-a}{z+a}$ (907) $= z + al \surd \frac{z-a}{z+a} = z + al (\frac{\surd(z^2 - a^2)}{z+a}) =$

193. $\sqrt{(y^2+a^2)}+al\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}-al\left(\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right)+C$, espressione d' un arco di logaritmica in cui C è facile a determinarsi (947. VII).

188. VII. Nella spirale d' Archimede, $ds=Mm=\sqrt{(rm^2+Mr^2)}=\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$ (948): ma $x=\frac{cy}{a}$; dunque $s=$ COM$=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(yy+\frac{a^4}{c^2}\right)}$. Descritta una parabola CN′ con $p=\frac{2a^2}{c}$; fatto CQ$=$CM$=y$ e condotta l'ordinata QN′, sarà CN′$=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+yy\right)}$ (950); dunque CN′$=$COM, onde regna dell' analogìa tra questa spirale e la parabola.

190. VIII. Nella spirale iperbolica, $x=\frac{ab}{y}$, $dx=-\frac{abdy}{y^2}$ ed $rM\left(=-\frac{ydx}{a}\ (948)\right)=\frac{bdy}{y}$, onde $mM^2\ (=rm^2+rM^2)=dy^2+\frac{b^2dy^2}{y^2}$, e l'arco COM$=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb+yy)}$. Dunque descritta una logaritmica NK la cui suttangente $=b=$ a quella della spirale (865), si avrà (Esem. VI.) MOC $=$ all'arco infinito NK, prendendo l'ordinata NR $=$ CQ $=$ CM. Ma per l' espressione d' un'arco di spirale o di logaritmica compreso tra le due ordinate y, y', si troverà $\sqrt{(b^2+y^2)}-\sqrt{(b^2+y'y')}+bl\frac{y[b+\sqrt{(b^2+y'^2)}]}{y'[b+\sqrt{(b^2+y^2)}]}$.

173. IX. Nella spirale logaritmica (649) $\cos Mmr(c):mr(dy)::1:Mm=\frac{dy}{c}$; dunque ADM$=\frac{y}{c}=$ MT per esser simili i triangoli mrM, MAT.

193. X. Nella curva CE a doppia curvatura x è s, ed y è z (802); dunque $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ diviene $\sqrt{(ds^2+dz^2)}=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2=px$, $y^3=\frac{9}{16}pz^2$, verrà $dy^2=\frac{pdx^2}{4x}$, $dz^2=\frac{4ydy^2}{p}=dx^2\sqrt{\frac{p}{x}}$, e $\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\int\sqrt{\left(dx^2+\frac{pdx^2}{4x}+dx^2\sqrt{\frac{p}{x}}\right)}=\int dx\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}\right)=$

$x + \sqrt{px} = x + y$ senza costante, perchè $x = 0$ dà l' arco della curva $= 0$.

Misura delle Solidità.

952. Un solido S da misurarsi s' immagini decomposto in un' infinità di piccoli strati paralleli. Chiamando t la base d' un di essi, dx la sua altezza o una parte infinitesima della distanza x dello strato dal vertice, sarà $S = \int t dx + C$.

953. Per esempio, sia B la base del solido, A la sua altezza; se le basi degli strati son proporzionali a una potenza m della loro distanza dal vertice, si avrà $A^m : B :: x^m : t = \frac{Bx^m}{A^m}$; dunque $\int t dx = \frac{B}{A^m} \int x^m dx = \frac{Bx^{m+1}}{(m+1)A^m}$ senza costante se la porzione cominci dal vertice. Onde il solido intero $= \frac{BA}{m+1}$, poichè allora $x = A$; perciò la solidità delle piramidi, in cui $m = 2$ (539), è $\frac{1}{3}BA$ (563).

954. Se il solido $BAB' = S$ è di rivoluzione, fatta $MP = y$, $Pp = \delta x$, sarà $mp = y + \delta y$, e il cono troncato $Mmm'M' = \pi \delta x (y^2 + y\delta y + \frac{1}{3}\delta y^2)$ (564), onde $\frac{\delta S}{\delta x} > \pi (y^2 + y\delta y + \frac{1}{3}\delta y^2)$; dunque presi i limiti (838) e posto $\delta y = 0$ (836), verrà $dS = \pi y^2 dx$ ed $S = \pi \int y^2 dx + C$. 195.

Esem. I. Nella sfera, $y^2 = 2ax - x^2$; dunque la solidità d'un segmento sferico (569) $= \pi x^2 (a - \frac{1}{3} x)$ e la sfera $= \frac{4}{3} a^3 \pi =$ ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

II. Nell' ellisse, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$; dunque il solido generato dalla sua rivoluzione intorno all' asse maggiore sta alla sfera circoscritta $:: bb : aa$, ovvero è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

955. Si chiama *Ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *Ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell' Ellisse intorno al suo asse minore. E' facile il trovare che anche quest' ultimo solido è $\frac{2}{3}$ del ci-

195. lindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa :: $abb : aab :: b : a$.

III. In una parabola di un ordine qualunque si ha $y^m = x^n a^{m-n}$, onde $\pi y^2 dx = \pi dx \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}$, e $\int \pi y^2 dx = \ldots$ $\frac{m\pi \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n+m}}}{2n+m} = \frac{m\pi x \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}}{2n+m} = \frac{m\pi x y^2}{2n+m}$, espressione del solido che perciò starà al cilindro circoscritto :: $m : m+2n$; quindi il paraboloide ordinario nel quale $m=2$, $n=1$, è la metà del cilindro circoscritto.

194. IV. Similmente se l' iperbola la cui equazione è $y^m x^n = a^{m+n}$ gira intorno all'asintoto CP, prendendo $CD = AD = a$, il solido descritto dal trapezio ADPM avrà per espressione $\frac{m}{2n-m} \pi (a^3 - xy^2)$, e perciò supposto $2n > m$, il solido descritto dallo spazio infinitamente lungo OADX sta al cilindro descritto da APCD :: $m : 2n - m$, e nell' iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

Superficie curve dei Solidi di rivoluzione.

956. Sia R una superficie di rivoluzione, e si faccia
195. tutto come sopra (954): poichè $Mm = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$, la superficie del cono troncato $Mmm'M'$ sarà $\pi(2y + \delta y)\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ (653), onde $\frac{R}{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}} > \pi(2y + \delta y)$; dunque fatto $\delta y = 0$, verrà $dR = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ed $R = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C = 2\pi \int n dx + C$, chiamando n la normale MN (861).

Es. I. Nella sfera, $n = a$ (862); dunque la superficie d' un segmento sferico qualunque è $2a\pi x$, e quella della sfera è $4a^2\pi$ o quattro circoli massimi.

II. Nel paraboloide ove $n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$ (751), si ha $2\pi \int dx \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \frac{4\pi}{3p} \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)^3} + C$ (858). Sia $x = 0$; sarà $C = -\frac{\pi p^2}{6}$.

196. III. Nell' ellisse fatto a il semiasse di rivoluzione che sarà il trasverso nell' ellissoide allungata e il conjugato nella compressa, e posto ne' due diversi casi $\pm a^2 \mp b^2 = c^2$; si

avrà (758) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$, e però se la curva giri o 196.
intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$.
Nel primo caso, descritto col raggio $CD = \frac{a^2}{c}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (947) $\frac{2bc\pi}{a^2} \times$ ABNP; ma nel secondo, determinata C col porre $x = 0$, sarà (914) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c} l \frac{c}{a^2}\left[x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)}\right]$.

IV. Nell' iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto $a^2 + b^2 = c^2$, si avrà (771. 767) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$, e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \times$ 197.
$\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$. Nel primo caso, determinata C col fare $x = a$, la superficie cercata sarà (913) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{c} l \frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(c+b)}$: ma nel secondo, determinata C col fare $x = 0$, sarà (914) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c} l\left[\frac{cx}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4}\right)}\right]$.

Metodo inverso delle Tangenti, e Integrazione dell' Equazioni differenziali.

957. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello che insegna a trovar l' equazione d' una curva in cui si conosca una proprietà qualunque delle tangenti. Cerchisi per es. la curva in cui la sunnormale è costante ed $= a$. Poichè (861) l' espression generale di questa retta è $\frac{ydy}{dx}$, avremo $\frac{ydy}{dx} = a$, $ydy = adx$, e integrando, per esprimere che la proprietà data conviene a tutti i punti della curva, si ha $\frac{1}{2}y^2 =$

ax, cioè $y^2 = 2a(x+C)$, equazione alla parabola, che risolve il problema proposto. E' dunque chiaro che questo *Metodo* conduce alla soluzione di equazioni differenziali che diconsi *del primo*, *del secondo* ec. *ordine* se contengono le differenze prime, seconde ec.; e son poi *lineari*, *quadratiche*, *cubiche* ec. se le variabili vi si trovano alla prima, seconda, terza ec. dimensione.

958. Sieno P, Q due funzioni di x, y; tutte l'equazioni differenziali del prim'ordine a due variabili verranno rappresentate da $Pdx + Qdy = 0$, equazione integrabile 1°. se P e Q sieno funzioni di x o di y sola, giacchè in tal caso ella diventa $dy = Xdx$ o $dx = Ydy$: anzi simili equazioni, fatta dx o dy costante, si integreranno, quando pur fossero di un ordine n^{simo}, col *metodo delle ripetute integrazioni*. Poichè da $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ si ha $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = Xdx$, ed integrando, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int Xdx + C$; di nuovo $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}} = dx\int Xdx + Cdx$, ed integrando $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx\int Xdx + Cx + C'$ ec., ripetuta l'operazione finchè si abbia y. Così se debba sommarsi la serie $y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} +$ ec. *in inf.*, supposto x non maggiore di 1, differenziando si ha $dy = \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \text{ec.}\right) dx$, e di nuovo differenziando, $ddy = (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \text{ec.})dx^2$, e differenziando una terza volta, $d^3y = (1 + x^2 + x^4 + \text{ec.})\, dx^3 = \frac{dx^3}{1-x^2}$ (260); dunque 1°. $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dx}{1-x^2}$, ed integrando (907), $\frac{ddy}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots \frac{l(1+x) - l(1-x)}{2}$ senza costante, perchè $x=0$ dà $y=0$: 2°. $\frac{ddy}{dx} = \frac{dx\,l(1+x) - dx\,l(1-x)}{2}$, ed integrando (920), $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)\,l(1+x) + (1-x)\,l(1-x)}{2}$: 3°. $dy = \ldots\ldots \frac{dx(1+x)l(1+x) + dx(1-x)l(1-x)}{2}$, ed integrando

(920), $y=\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 l(1+x)-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 l(1-x)-\frac{x}{2}$.

Inoltre se sia $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{dq}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}$, $s=\frac{dr}{dx}=\frac{d^4y}{dx^4}$ ec., verrà I. $x=\int\frac{dy}{p}$, II. $x=\int\frac{dp}{q}$ ed $y=\int pdx=\int\frac{pdp}{q}$; III. $x=\int\frac{dq}{r}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}$; IV. $x=\int\frac{dr}{s}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int dx\int dx\int rdx=\int\frac{dr}{s}\int\frac{dr}{s}\int\frac{rdr}{s}$ ec., formule integrabili se p sia funzione di y, q di p, r di q, s di r ec. Così per l' equazione $1=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ cioè $1=qr$ o $r=\frac{1}{q}$, la III. dà $x=\int qdq=\frac{1}{2}q^2+C$, $\int q^2dq=\frac{1}{3}q^3+C'$ ed $y=\frac{1}{3\cdot 5}q^5+\frac{1}{2}C'q^2+C''=\frac{(2x-2C)^{\frac{5}{2}}}{3\cdot 5}+\frac{C'(2x-2C)}{2}+C''$.

Riprese anche le formule $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ ec., verrà I. $\frac{dpdy}{dx}=pdp=qdy$, $\frac{1}{2}p^2=\int qdy$, $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int qdy}$, ed $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int qdy}}$: II. $\frac{dqdp}{dx}=qdq=rdp$, $\frac{1}{2}q^2=\int rdp$, $q=\frac{dp}{dx}=\sqrt{2\int rdp}$, $x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int rdp}}$ ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{2\int rdp}}$: III. $\frac{drdq}{dx}=rdr=sdq$, $\frac{1}{2}r^2=\int sdq$, $r=\frac{dq}{dx}=\sqrt{2\int sdq}$, $x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ed $y=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ec., formule integrabili se q sia funzione di y, r di p, s di q ec. Così per l' equazione $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ cioè $r=p$ e $\int rdp=\frac{1}{2}p^2+C$, la II. dà $x=\ldots\ldots\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=(914)\,l[p+\sqrt{(p^2+2C)}-lC']=xle$, $C'e^x-$

$p=\sqrt{(p^2+2C)}, p=\frac{C'e^x}{2}-\frac{Ce^{-x}}{C'}$, ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=$ $\sqrt{(p^2+2C)}+C''=\frac{C'e^x}{2}+\frac{Ce^{-x}}{C'}+C''=Ce^x+C'e^{-x}+C''$, preso il valore di p e mutate le costanti $\frac{C'}{2}$ in C, e $\frac{C}{C'}$ in C'.

959. 2°. Si integrerà l' equazione $Pdx+Qdy=0$ se $\frac{d^yP}{dy}=\frac{d^xQ}{dx}$ (936). Spesso però anche non avverandosi quella condizione, l'equazione può integrarsi col moltiplicarla per un fattore idoneo: tale è $xdy-ydx+xdx=0$ se si moltiplichi per $\frac{1}{x^2}$. Sia dunque F il fattor cercato, e l' equazione diverrà $FPdx+FQdy=0$, che supponendosi ora integrabile, darà $\frac{d^y(FP)}{dy}=\frac{d^x(FQ)}{dx}$, o differenziando, $\frac{Fd^yP}{dy}+\frac{Pd^yF}{dy}-\frac{Fd^xQ}{dx}-\frac{Qd^xF}{dx}=0$, formula generale da cui si avrà F se si prenda per F un' idonea funzione di x e di y con esponenti indeterminati, come $F=x^my^n$; ed m, n si determineranno col sostituir nella formula i valori di F, P, Q e loro differenziali, e con eguagliare a zero i termini omologhi. Così data l' equazione $2adx-2bydx-bxdy=0$, avrò $P=2a-2by, \frac{d^yP}{dy}=-2b, Q=-bx, \frac{d^xQ}{dx}=-b, \frac{d^yF}{dy}=nx^m\times y^{n-1}, \frac{d^xF}{dx}=my^nx^{m-1}$, e sostituendo nella formula, trovo $(m-2n-1)bx^my^n+2anx^my^{n-1}=0$. Eguaglio a zero i termini omologhi, ed ottengo 1°. $m-2n-1=0$: 2°. $2an=0$; dalla seconda equazione ricavo $n=0$, onde la prima da $m=1$; dunque $F=xy^0=x$, per cui moltiplicando la data equazione, si ha $2axdx-2bxydx-bx^2dy=0$, ed integrando, $ax^2-byx^2=C$.

Si osservi 1°. che lo stesso metodo ha luogo se si voglia il fattore che rende esatta una data differenziale, come $dy-ydx$: 2°. che se m, n si abbiano da una sola equazione, come da $m=n+1$, si potrà fare $n=0$ e anche prender per n un numero qualunque: 3°. che non si ha fin quì regola alcuna generale per dare ad F una forma adattata

tata ai particolari bisogni, benchè in certi casi sia facile di determinarlo; ed eccone il modo.

Supposto $dF = Adx + Bdy$ onde $\frac{d^x F}{dx} = A$, $\frac{d^y F}{dy} = B$ (936), la trovata fórmula generale diverrà $\frac{F d^y P}{dy} + BP - \frac{F d^x Q}{dx} - AQ = o$, cioè $\frac{d^y P}{dy} - \frac{d^x Q}{dx} = \frac{AQ - BP}{F}$; dunque se il primo membro di quest' equazione sia funzione della sola x onde $d^x Q = dQ$, lo sarà anche il secondo e perciò anche F, e si avrà $B = o$, $dF = Adx$, $\frac{dx d^y P}{dy} - dQ = \frac{Q dF}{F}$, $\int \frac{dF}{F}$ $(= lF) = \ldots \ldots$ $\int \frac{dx d^y P}{Q dy} - \int \frac{dQ}{Q}$ $(= - lQ)$, e quindi $F = \frac{1}{Q} e^{\int \frac{dx d^y P}{Q dy}}$. Data per esempio, l' equazione $rdx + tydx + udy = o$ ove r, t, u son funzioni della sola x, sarà $P = r + ty$, $Q = u$, $\frac{d^y P}{dy} = t$ ed $F = \frac{1}{u} e^{\int \frac{tdx}{u}}$, fattore che rende esatta la data, e che per l' equazione $xdy - ydx + xdx = o$ accennata di sopra, si trova essere $= \frac{1}{x^2}$ come dicemmo. Con questo metodo si sommano le due serie $y = x^2 \mp \frac{x^4}{4} + \frac{3x^6}{4.6} \mp \frac{3.5x^8}{4.6.8} + \text{ec.}$: poichè differenziando e poi dividendo per x^3, si ha $\frac{dy}{x^3} = \frac{2dx}{x^2} \mp dx + \frac{3x^2 dx}{4} \mp \text{ec.}$; dunque $\int \frac{dy}{x^3} = -\frac{2}{x} \mp x + \frac{x^3}{4} \mp \text{ec.} = \ldots$ $= \frac{-2 \mp y}{x}$, onde differenziando, $\frac{dy}{x} = \mp xdy + (2 \pm y) dx$, cioè $(1 \pm x^2) dy \mp yxdx - 2xdx = o$, ove $t = \mp x$, $u = 1 \pm x^2$ ed $F = \frac{1}{1 \pm x^2} e^{\mp \int \frac{xdx}{1 \pm x^2}} = \frac{1}{1 \pm x^2} e^{- l\sqrt{(1 \pm x^2)}}$ (856) $= \ldots \ldots$

$\frac{1}{1 \pm x^2} e^{l \frac{1}{\sqrt{(1 \pm x^2)}}}$ (300) $= \frac{1}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}}$ (308). Quindi . . $\frac{(1 \pm x^2) dy \mp yxdx - 2xdx}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}} = 0$, e integrando, $\frac{y \pm 2}{\sqrt{(1 \pm x^2)}} =$ $C = \pm 2$, perchè $y = 0$ dà $x = 0$; dunque $y = \pm 2\sqrt{(1 \pm x^2)} \mp 2$.

Si noti che ad $rdx + tydx + udy = 0$ si riduce anche $ry^n dx + tydx + udy = 0$ dividendola per y^n e ponendo $y^{1-n} = z$: vi si riducono anche dell' equazioni più complicate, ma non dobbiamo allungarci di più. Intanto il metodo è particolare, e perciò qualor non riesca, si passa a *separar l' equazione* cioè a dividerla in due membri, ciascun de' quali contenga una sola variabile con la sua differenziale. Anche questo metodo non è generale: ecco alcuni casi in cui la separazione riesce.

960. Se $P = XY$, $Q = X'Y'$ (X, X' son funzioni di x, ed Y, Y' funzioni di y), sarà $\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Y'dy}{Y}$, equazione separata.

961. Se P e Q son funzioni omogenee di x, y, cioè se tutti i lor termini hanno x, y allo stesso numero di dimensioni, fatto $x = yz$, sarà $\frac{Q}{P}$ una funzione Z di z, e si avrà $dx + Z dy = 0 = zdy + ydz + Zdy$, e separando, $\frac{dz}{Z + z} = -\frac{dy}{y}$. Così $(ax + by) dx = (mx + ny) dy$, fatto $x = yz$ onde $\frac{Q}{P} = Z = \frac{-mz - n}{az + b}$, diviene $-\frac{dy}{y} = \frac{(az + b) dz}{az^2 + (b-m)z - n}$, equazione facile a integrare (910. 914).

962. Sia ora l' equazione generale $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} \times y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''} +$ ec. $= 0$ ove per la natura di tali equazioni si ha sempre $p + q = p' + q' = p'' + q'' =$ ec.: fatto $y = z^r$, ella diventa $r^q ax^m z^{r(n+q)-q} dx^p uz^q + \ldots . r^{q'} bx^{m'} z^{r(n'+q')-q'} dx^{p'} dz^{q'} + r^{q''} cx^{m''} z^{r(n''+q'')-q''} \times dx^{p''} dz^{q''} +$ ec. $= 0$, e sarà omogenea se $m + r(n + q) - q = m' + r(n' + q') - q' = m'' + r(n'' + q'') - q''$ ec., cioè se $r = \frac{m - q - m' + q'}{n' + q' - n - q} = \frac{m - q - m'' + q''}{n'' + q'' - n - q} =$ ec. Così l' equa-

zione $ay^2x^2dx + bdx + cyxdx + fx^4y^2dy = 0$ dà $m = n = 2$, $m' = n' = 0$, $m'' = n'' = 1$, $m''' = 4$, $n''' = 2$, $q = q' = q'' = 0$, $q''' = 1$ e però $r = \frac{2}{-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{2-4+1}{2+1-2} = -1$; dunque fatto $y = z^{-1}$, si avrà $az^{-2}x^2dx + bdx + cz^{-1}xdx - fx^4z^{-4}dz = 0$, equazione omogenea e perciò integrabile (961). Parimente l' equazione $ax^2dx^4 + bx^3y^3dx^2dy^2 + cx^5y^{-11}dx^3dy + gx^5ydy^4 = 0$ dà $m = 2$, $n = 0$, $m' = n' = 3$, $m'' = 5$, $n'' = -11$, $m''' = 5$, $n''' = 1$, $q = 0$, $q' = 2$, $q'' = 1$, $q''' = 4$ e però $r = \frac{2-3+2}{3+2} = \frac{2-5+1}{-11+1} = \frac{2-5+4}{1+4} = \frac{1}{5}$; dunque fatto $y = z^{\frac{1}{5}}$, si avrà $625ax^2dx^4 + 25bx^3z^{-1} \times dx^2dz^2 + 125cx^5z^{-3}dx^3dz + gx^5z^{-3}dz^4 = 0$, equazione omogenea che facendo $z = ux$ e $dz = (t+u)dx$, si riduce a $\frac{g(t+u)^4}{u^3} + \frac{25b(t+u)^2}{u} + \frac{125c(t+u)}{u^3} + 625a = 0$; or da questa si ha t data per u, onde supposta $t = U$, da $udx + xdu = (t+u)dx$ viene $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t} = \frac{du}{U}$. Del resto, se taluno dei rotti $\frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q}$ ec. divenisse $\frac{0}{0}$, non se ne farebbe conto, ciò solamente significando che qualunque valore di r rende omogenei i termini d' onde quel rotto risulta; e se divenissero $\frac{0}{0}$ tutti i rotti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

963. Passiamo ad altre equazioni, e sia da integrarsi $py - \frac{dy}{dx} + X = 0$, ove p, X possono essere funzioni di x. Paragonandola con $rdx + tydx + udy = 0$ (959), si ha $u = -1$, $t = p$ ed $F = -e^{-\int pdx}$; onde fatto $pdx = dz$, ella diverrà $-Xe^{-z}dx - ye^{-z}dz + e^{-z}dy = 0$, ed integrando (937), $-\int \frac{Xdx}{e^z} + ye^{-z} = C$, cioè $y = e^{\int pdx}$ . . . . .

$\left(\int \frac{Xdx}{e^{\int pdx}} + C\right)$. Così se si abbia $y + \frac{dy}{dx} = x^2$, sarà $p = -1$, $X = x^2$ ed $y = e^{-x}\int e^x x^2 dx + Ce^{-x} = (923)\ Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$. A questa equazione si riduce 1°. $py - \frac{dy}{dx} + Xy^{n+1} = 0$ col dividerla per y^{n+1} e far poi $\frac{1}{y^n} = u$: 2°. $py^{m+1} - \frac{y^n dy}{dx} + Xy^n = 0$ col dividerla per y^n e far quindi $y^{m-n+1} = u$: 3°. $pXy^{m+1} dx - X'y^m dy + X''y^n dx = 0$ dividendola per Xdx, facendo $\frac{X'}{X} = r$, $\frac{X''}{X} = q$ e trattandola poi come la passata.

964. Ma sia l'equazion lineare del second' ordine $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} = 0$ ove a, b, dx son costanti. Fatto $p = \frac{dy}{dx}$ ovvero $mp - \frac{mdy}{dx} = 0$ (m è indeterminata) e sommata questa con la data, viene I. $y + (a + m)\,p - (mdy - bdp)\,\frac{1}{dx} = 0$, ove suppongo (giacchè l' indeterminata m lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y + (a + m)\,p$ sia l'integrale della seconda $mdy - bdp$; dunque $y + (a + m)\,p = \frac{1}{m}\int(mdy - bdp) = y - \frac{bp}{m}$, onde $a + m = -\frac{b}{m}$ e II. $m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$. Fatto ora III. $y + (a + m)\,p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $du = dy - \frac{bdp}{m}$ ovvero $mdu = mdy - bdp$, la I. diverrà $u - \frac{mdu}{dx} = 0$ che ci dà (963) IV. $u = Ce^{\frac{x}{m}}$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la III. si scioglierà nelle due $y + (a + m')p = u'$, $y + (a + m'')p = u''$ dalle quali si ha la V. $y = \frac{(a + m')\,u'' - (a + m'')\,u'}{m' - m''}$.

Così data $y + \frac{4dy}{5dx} - \frac{ddy}{5dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, onde per la II. viene $m = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$ e perciò $m' = \frac{1}{5}$, $m'' = -1$; dunque per la IV. $u' = Ce^{5x}$ ed $u'' = C'e^{-x}$, con che dalla V. si ottiene $y = \frac{1}{6}(Ce^{5x} + 5C'e^{-x})$.

Di quì si ha la somma di tutte le serie della forma $1 + \frac{x^r}{1.2.3 \ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3 \ldots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3 \ldots 3r} +$ ec. *in infin.*, essendo r numero intero e positivo. Si voglia la somma della serie $y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ ec.: differenziando abbiamo $dy = (x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} +$ ec.$)\, dx$, e nuovamente differenziando presa dx costante, $ddy = (1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ec.$)\, dx^2 = ydx^2$. Si ha dunque $y - \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ove $a = 0$, $b = -1$, $m = \pm\sqrt{1}$, $m' = 1$, $m'' = -1$ e perciò $y = \frac{1}{2}(Ce^x + C'e^{-x})$. Per determinar le costanti si osservi che quando $x = 0$, viene $y = \frac{1}{2}(C + C') = 1$, $dy\ (= \frac{1}{2}(Ce^x dx - C'e^{-x}dx)) = 0 = C - C'$; dunque $C = C' = 1$ ed $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$.

965. Se manchi y nell' equazione data, fatto $\frac{dy}{dx} = z$, ella diverrà $az + \frac{bdz}{dx} = 0$, e il suo integrale si trova $y = -\frac{b}{a} Ce^{-\frac{ax}{b}} + C'$ (963): e se manchi anche $\frac{ady}{dx}$, si userà per $\frac{bddy}{dx^2}$ il metodo già spiegato (958). Se nella II. equazione sia $\frac{1}{4}a^2 \pm b$, verrà $m' = m'' = -\frac{1}{2}a$ e quindi $u' = u''$ nella IV., ed $y = \frac{0}{0}$ nella V., ciò che non potrebbe avverarsi se non fosse anche $C = C'$. Ora

per determinar y in questo caso, prendo ω infinitesima e pongo $m'' = m' + \omega$; dunque $\frac{x}{m''} = \frac{x}{m' + \omega} = \frac{x}{m'} - \frac{\omega x}{m'(m' + \omega)}$, ed $u'' = Ce^{\frac{x}{m'}}\left(1 - \frac{\omega x}{m' m''}\right)$ (308), trascurando ω^2, ω^3 ec. (197); e poichè $m' - m'' = -\omega$, la V. equazione, posti nel numeratore $Ce^{\frac{x}{m'}}$ per u' ed $m' + \omega$ per m'', diverrà $y = (1 + \frac{2x}{a}) Ce^{-\frac{2x}{a}}$, onde fatto $\frac{2C}{a} = C'$, viene $y = (C + C'x) e^{-\frac{2x}{a}}$; così se si abbia $y + \frac{4dy}{5dx} + \frac{4ddy}{25dx^2} =$ o, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{4}{25}$ ed $y = (C + C'x) e^{-\frac{5x}{2}}$. Che se nella stessa equazione II. le radici m', m'' sieno immaginarie, potrà supporsi (149) $m' = \frac{-a + 2g\sqrt{-1}}{2}$, $m'' = \ldots \frac{-a - 2g\sqrt{-1}}{2}$, onde $\frac{x}{m'} = \frac{-2x(a + 2g\sqrt{-1})}{(a - 2g\sqrt{-1})(a + 2g\sqrt{-1})} = \frac{-2ax - 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$ ed $\frac{x}{m''} = \frac{-2ax + 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$. Sia $\frac{2ax}{a^2 + 4g^2} = t$, $\frac{4gx}{a^2 + 4g^2} = z$; dunque $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{e^{-t}[(a + m')C'e^{z\sqrt{-1}} - (a + m'')Ce^{-z\sqrt{-1}}]}{m' - m''}$$

: ma $e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} z$ (630); dunque sostituendo, ponendo C e C′ invece di $\frac{(a + m')C' - (a + m'')C}{m' - m''}$ e di $\frac{[(a + m')C' + (a + m'')C]\sqrt{-1}}{m' - m''}$, e rimettendo i valori di t, z, verrà $y = e^{\frac{-2ax}{a^2 + 4g^2}}\left(C \cos \frac{4gx}{a^2 + 4g^2} + C' \operatorname{sen} \frac{4gx}{a^2 + 4g^2}\right)$. Così se si abbia $y - \frac{4dy}{5dx} + \frac{ddy}{5dx^2} =$ o, sarà $a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $g = \frac{1}{5}$ ed $y = e^{2x}(C \cos x + C' \operatorname{sen} x)$.

966. Nel modo stesso potranno integrarsi due equazioni

$y+ax+\frac{bdx}{dt}=0, y+fx+\frac{gdy}{dt}=0$, supposte a, b, f, g costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l' indeterminata m e si sommi con la prima, verrà $(m+1)y+(a+fm)x+(gmdy+bdx)\frac{1}{dt}=0$; onde fatto come sopra (964), $(m+1)y+(a+fm)x=\frac{1}{m}\int(gmdy+bdx)=gy+\frac{bx}{m}$, si avrà $m+1=g$, $a+fm=\frac{b}{m}$ ed $\frac{am+fm^2}{b}=g-m$, equazione che determina m. Quindi se sia $(m+1)y+(a+fm)x=u=gy+\frac{bx}{m}$ e perciò $mdu=gmdy+bdx$, l' equazione sommata diverrà $u+\frac{mdu}{dt}=0$ e avremo al solito $u=Ce^{-\frac{t}{m}}$. Il rimanente si fa come sopra (964), e tutto ciò ha luogo quando pur l' equazioni sieno $y+ax+\frac{bdx+cdy}{Tdt}=0, y+a'x+\frac{b'dx+c'dy}{Tdt}=0$, e si trova $u=Ce^{-\int\frac{Tdt}{m}}$.

967 Sia anche l' equazione $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}=X$ ove X è funzione di x. Tutto si farà come sopra (964), se non che l' equazione è qui $\frac{u}{m}-\frac{du}{dx}-\frac{X}{m}=0$ che dà (963) $u=e^{\frac{x}{m}}(C-\frac{1}{m}\int e^{-\frac{x}{m}}Xdx)$. Così avendo $y-\frac{dy}{dx}-\frac{3ddy}{4dx^2}=2x$, sarà $a=-1, b=-\frac{3}{4}, m'=\frac{3}{2}, m''=-\frac{1}{2}$, $X=2x$, $u'=Ce^{\frac{2}{3}x}+2x+3$, $u''=C'e^{-2x}+2x-1$ (923), ed $y=\frac{1}{4}C'e^{-2x}+\frac{3}{4}Ce^{\frac{2x}{3}}+2(x+1)$.

968. Questo metodo che a cagione dell'indeterminate m ec. introdotte nell' equazioni, si chiama *dei Coefficienti In-*

determinati, vale anche per l' equazioni lineari di un qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n - 1$ d' equazioni $mp - \frac{mdy}{dx} = 0$, $kq - \frac{kdp}{dx} = 0$, $gr - \frac{gdq}{dx} = 0$ ec., si integreranno con la stessa facilità: il giro però sarà in queste più lungo, attese l' equazioni $n - 1$ da cui debbon dedursi i valori dell' indeterminate k, g ec. dati per m, e quelle del grado $(n - 1)^{simo}$ dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''' ec. e quindi u', u'', u''' ec.

Del resto, con le due equazioni $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ si integrano anche quelle di second' ordine ove manchi y o x o sia integrabile la risultante equazione di prim' ordine tra x o y e p: allora p sarà dato per x o per y e si avrà $y = \int pdx$ o $x = \int \frac{dy}{p}$. Così da $dx^2 + dxdy - Xd^2y = 0$ risulta l' integrabile $\frac{dp}{1+p} = \frac{dx}{X}$: e da $d^2y + mdxdy + nydx^2 = 0$ risulta $q + mp + ny = 0 = qdy + mpdy + nydy = pdp + mpdy + nydy$, parimente integrabile perchè omogenea (961).

Ma l' omogenee di second' ordine, in cui dx, d^2x ec. si valutano per una dimensione, posson sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y = ux$ e $qx = z$, che atteso $dy = pdx$ e $dp = qdx = \frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{z}$: così $aydx^2 - bxdxdy + gy^2d^2y = 0$ diventa $au - bp + gu^2qx = 0 = au - bp + gu^2z$, onde $z = \frac{bp - au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u} = \frac{gu^2dp}{bp-au}$ e $dp = \ldots$ $\frac{(bp - au)du}{(p-u)gu^2}$, equazion del prim' ordine che se possa separarsi (come nel caso di $a = b$) separerà anche l' altra $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Anzi tali equazioni si ridurranno, sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual' è $yd^2y - dy^2 - Xydxdy = 0$; poichè fatto $p = \frac{dy}{dx} = uy$, $q = \frac{dp}{dx} = yz$ onde $dy = uydx$, $dp = yzdx = udy + ydu$, $\frac{dy}{y} = udx = \frac{zdx - du}{u}$, ella diventa $yqdx^2 -$

ta $yqdx^2 - p^2dx^2 - Xypdx^2 = 0 = z - u^2 + uX$, che dà $udx = \frac{(u^2 + uX)\,dx - du}{u}$, onde $\frac{du}{u} = Xdx$, equazione separata del prim' ordine che separa anche $\frac{dy}{y} = udx$.

L' equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D' ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo quì varj esempj di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second' ordine, ove X, Y esprimon sempre una funzione di x o di y.

I. $x^2dx^2 + axydxdy = bdy^2$: compiendo il quadrato si ha $(xdx + \frac{1}{2}aydy)^2 = (\frac{1}{4}a^2y^2 + b)\,dy^2$, ed estraendo la radice, $xdx = \frac{1}{2}dy\,[\sqrt{(a^2y^2 + 4b)} - ay]$.

II. $4a^2x^2dx + 4a^2bxdx + 4abyxdx + 2ab^2ydx + b^2y^2dx - ab^3dy = 0$. Osservo che l' equazione può scriversi così: $(2ax + by + ab)^2dx - a^2b^2dx - ab^3dy = 0$; e supposto $(2ax + by + ab)^2dx = 0$; verrebbe $y = -\frac{2ax}{b} - a$. Faccio dunque $y = z - \frac{2ax}{b} - a$, $dy = dz - \frac{2adx}{b}$, e sostituendo e riducendo, viene $dx = \frac{abdz}{a^2 + z^2}$.

III. $-a^3dx - 3yx^2dx + 3y^2xdx - y^3dx + x^3dy + a^3dy = 0$. Osservo che supposto $3yxdx\,(y - x) = 0$, verrebbe $y = x$, il che si avrebbe anche dall' equazioni combinate $-dx\,(a^3 + y^3) = 0$, $dy\,(x^3 + a^3) = 0$. Faccio dunque $y = z + x$, $dy = dz + dx$, e sostituendo e riducendo, viene $\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{a^3 + x^3}$.

IV. $x^2dx + xydy + y^2dx = Xdx$: fatto $xy = z$, si ha $zdz = (X - x^2)\,xdx$.

V. $2ydy + xdy + ydx = (a + x + y)\,Ydy$; fatto $x + y = z$, viene $ydz + zdy = (a + z)\,Ydy$: fatto $yz = u$, viene $du - \frac{uYdy}{y} = aYdy$: fatto $\frac{Ydy}{y} = \frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$: fatto $\frac{u}{q} = p$, viene infine $dp = \frac{aYdy}{q}$.

XVIII. $2y^2dyddy\sqrt{xy}+y^2dy^3\sqrt{\frac{x}{y}}=dx^2(ydx-xdy)$ ove dx è costante: fatto $\frac{x}{y}=z$, viene $ydy^2=dx^2\,(2\sqrt{z}+C)$.

XIX. $xddx+dx^2=-\frac{yx^2dx^2}{a^3}$ ove dy è costante: fatto $xdx=zdy$, viene $\frac{a^3dz}{z^2}=-ydy$.

XX. $a^{2m}dy^{m-2}ddy=Xdx^m$ ove è costante dx: fatto $dy=zdx$, viene $a^{2m}z^{m-1}dz=Ydy$.

XXI. $adxdy=(2addx-2xddx-2ddy\sqrt{x}-dx^2)(a-x)\sqrt{x}$: se si faccia $a-x=p^2$ e $dy=pdz$, viene $\frac{adxdz}{2p^2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dpdz\sqrt{x}}{p}-ddz\sqrt{x}-\frac{dx^2}{2p}$, cioè posto il valor di $a=p^2+x$ e di $dx=-2pdp$, $ddz\sqrt{x}+\frac{dxdz}{2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dx^2}{2p}$ il cui integrale è $dz\sqrt{x}=pdx$ cioè $pdz\ (=dy)=\frac{p^2dx}{\sqrt{x}}+C$.

XXII. $Ydx^2-mdy^2-nyddy=0$ ove dx è costante: fatto $dx=zdy\sqrt[n]{y^m}$ onde $0=(dydz+zd^2y)\sqrt[n]{y^m}+\frac{mzdy^2}{n}\times\sqrt[n]{y^{m-n}}$, cioè $nyddy=-mdy^2-\frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}=-\frac{ndz}{z^3}$ e $dx=dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2\int(Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}+C)}}$.

969. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, posson generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati* $dy=ax^mdx+by^2dx$, sopra cui lasceremo che si consulti il Calcolo Integrale di Le-Seur e Iacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

Probl. I. Trovar la curva la cui suttangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{mx}{n}$. Si avrà dunque separando, $\frac{ndx}{x}=\frac{mdy}{y}$, e integrando, $nlx=mly+lC$; fatto dunque $x=y=c$, sarà $lC=(n-m)lc$, onde $y^m=x^nc^{m-n}$, equazione cercata.

II. Qual' è la curva che ha per suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2+x^2}{x}$?
Si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$ ed integrando, $ly = l(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = lC(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $y = C\surd(a^2+x^2)$: fatto $x=0$, divien costante l' ordinata $y = Ca = b$, onde $C = \frac{b}{a}$; perciò $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$, equazione all' iperbola (767).

III. Qual' è la curva in cui lo spazio $ABM = \frac{m}{n}$ AMQ? si ha dunque $\frac{m}{n}\int xdy = \int ydx$ (946), $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$. 198.

IV. Trovar la curva BM il cui spazio ABMP eguagli l' arco BM moltiplicato per una costante a, onde $\int ydx = a\int\surd(dx^2+dy^2)$. Dunque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\surd(y^2-a^2)}$; ed integrando, $\frac{x}{a} = l\frac{c}{a}[y+\surd(y^2-a^2)]$ (913). 199.

V. Trovar la curva AM, in cui il raggio osculatore $MC = \frac{m}{n}$ MN. Poichè MO : MC :: MP : MN, supposta dx costante, sarà (869) $\frac{m}{n}y = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, ovvero $\frac{m}{n}yddy + dx^2 + dy^2 = 0$. Per integrare, sia $dx = pdy$ e differenziando, $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ e sostituendo nell' equazione, $\frac{ndy}{my} = \frac{dp}{p(p^2+1)}$; dunque $\frac{n}{m}l\frac{y}{c} = l\frac{p}{\surd(p^2+1)}$ (851), $p = \pm\sqrt[m]{\frac{y^n}{\surd(c^{2n}-y^{2n})}}$, e $dx = \pm dy\sqrt[m]{\frac{y^n}{\surd(c^{2n}-y^{2n})}}$, equazione differenziale del prim' ordine della curva cercata. Se $n = m$, si ha $dx = \pm ydy(c^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed $x = c' \pm \surd(c^2-y^2)$, equazione al circolo. Se $m = 2n$, si ha $dx = \frac{\pm dy\surd y}{\surd(c-y)}$, equazione alla cicloide. 200.

VI. Trovar la curva BM tale che conducendo per l' origine A dell' ascisse la retta AO che faccia coll' asse un 201.

$\left(\int \frac{X dx}{e^{\int p dx}} + C\right)$. Così se si abbia $y + \frac{dy}{dx} = x^2$, sarà $p = -1$, $X = x^2$ ed $y = e^{-x}\int e^x x^2 dx + Ce^{-x} = (923)\ Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$. A questa equazione si riduce 1°. $py - \frac{dy}{dx} + Xy^{n+1} = o$ col dividerla per y^{n+1} e far poi $\frac{1}{y^n} = u$: 2°. $py^{m+1} - \frac{y^n dy}{dx} + Xy^n = o$ col dividerla per y^n e far quindi $y^{m-n+1} = u$: 3°. $pXy^{m+1} dx - X'y^m dy + X''y^n dx = o$ dividendola per Xdx, facendo $\frac{X'}{X} = r$, $\frac{X''}{X} = q$ e trattandola poi come la passata.

964. Ma sia l'equazion lineare del second' ordine $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} = o$ ove a, b, dx son costanti. Fatto $p = \frac{dy}{dx}$ ovvero $mp - \frac{mdy}{dx} = o$ (m è indeterminata.) e sommata questa con la data, viene I. $y + (a + m)p - (mdy - bdp)\frac{1}{dx} = o$, ove suppongo (giacchè l'indeterminata m lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y + (a + m)p$ sia l'integrale della seconda $mdy - bdp$; dunque $y + (a + m)p = \frac{1}{m}\int(mdy - bdp) = y - \frac{bp}{m}$, onde $a + m = -\frac{b}{m}$ e II. $m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$. Fatto ora III. $y + (a + m)p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $du = dy - \frac{bdp}{m}$ ovvero $mdu = mdy - bdp$, la I. diverrà $u - \frac{mdu}{dx} = o$ che ci dà (963) IV. $u = Ce^{\frac{x}{m}}$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la III. si scioglierà nelle due $y + (a + m')p = u'$, $y + (a + m'')p = u''$ dalle quali si ha la V. $y = \frac{(a + m')u'' - (a + m'')u'}{m' - m''}$.

Così data $y+\frac{4dy}{5dx}-\frac{ddy}{5dx^2}=0$, sarà $a=\frac{4}{5}, b=-\frac{1}{5}$, onde per la II. viene $m=-\frac{2}{5}\pm\frac{3}{5}$ e perciò $m'=\frac{1}{5}$, $m''=-1$; dunque per la IV. $u'=Ce^{5x}$ ed $u''=C'e^{-x}$, con che dalla V. si ottiene $y=\frac{1}{6}(Ce^{5x}+5C'e^{-x})$.

Di quì si ha la somma di tutte le serie della forma $1+\frac{x^r}{1.2.3...r}+\frac{x^{2r}}{1.2.3..2r}+\frac{x^{3r}}{1.2.3...3r}+$ ec. *in infin.*, essendo r numero intero e positivo. Si voglia la somma della serie $y=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+$ ec.: differenziando abbiamo $dy=(x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+$ ec.$)\,dx$, e nuovamente differenziando presa dx costante, $ddy=(1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$ ec.$)\,dx^2=ydx^2$. Si ha dunque $y-\frac{ddy}{dx^2}=0$, ove $a=0, b=-1, m=\pm\sqrt{1}, m'=1, m''=-1$ e perciò $y=\frac{1}{2}(Ce^x+C'e^{-x})$. Per determinar le costanti si osservi che quando $x=0$, viene $y=\frac{1}{2}(C+C')=1$, $dy\,(=\frac{1}{2}(Ce^x dx-C'e^{-x}dx))=0=C-C'$; dunque $C=C'=1$ ed $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$.

965. Se manchi y nell' equazione data, fatto $\frac{dy}{dx}=z$, ella diverrà $az+\frac{bdz}{dx}=0$, e il suo integrale si trova $y=-\frac{b}{a}Ce^{-\frac{ax}{b}}+C'$ (963): e se manchi anche $\frac{ady}{dx}$, si userà per $\frac{bddy}{dx^2}$ il metodo già spiegato (958). Se nella II. equazione sia $\frac{1}{4}a^2=b$, verrà $m'=m''=-\frac{1}{2}a$ e quindi $u'=u''$ nella IV., ed $y=\frac{0}{0}$ nella V., ciò che non potrebbe avverarsi se non fosse anche $C=C'$. Ora

per determinar y in questo caso, prendo ω infinitesima e pongo $m'' = m' + \omega$; dunque $\frac{x}{m''} = \frac{x}{m' + \omega} = \frac{x}{m'} - \frac{\omega x}{m'(m' + \omega)}$, ed $u'' = Ce^{\frac{x}{m'}}\left(1 - \frac{\omega x}{m' m''}\right)$ (308), trascurando ω^2, ω^3 ec. (197); e poichè $m' - m'' = -\omega$, la V. equazione, posti nel numeratore $Ce^{\frac{x}{m'}}$ per u' ed $m' + \omega$ per m'', diverrà $y = (1 + \frac{2x}{a})Ce^{-\frac{2x}{a}}$, onde fatto $\frac{2C}{a} = C'$, viene $y = (C + C'x)e^{-\frac{2x}{a}}$: così se si abbia $y + \frac{4dy}{5dx} + \frac{4ddy}{25dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{4}{25}$ ed $y = (C + C'x)e^{-\frac{5x}{2}}$. Che se nella stessa equazione II. le radici m', m'' sieno immaginarie, potrà supporsi (149) $m' = \frac{-a + 2g\sqrt{-1}}{2}$, $m'' = \ldots \frac{-a - 2g\sqrt{-1}}{2}$, onde $\frac{x}{m'} = \frac{-2x(a + 2g\sqrt{-1})}{(a - 2g\sqrt{-1})(a + 2g\sqrt{-1})} = \frac{-2ax - 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$ ed $\frac{x}{m''} = \frac{-2ax + 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$. Sia $\frac{2ax}{a^2 + 4g^2} = t$, $\frac{4gx}{a^2 + 4g^2} = z$; dunque $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{e^{-t}[(a + m')C'e^{z\sqrt{-1}} - (a + m'')Ce^{-z\sqrt{-1}}]}{m' - m''}$: ma $e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\,.\,\operatorname{sen} z$ (630); dunque sostituendo, ponendo C e C′ invece di $\frac{(a + m')C' - (a + m'')C}{m' - m''}$ e di $\frac{[(a + m')C' + (a + m'')C]\sqrt{-1}}{m' - m''}$, e rimettendo i valori di t, z, verrà $y = e^{\frac{-2ax}{a^2 + 4g^2}}\left(C \cos \frac{4gx}{a^2 + 4g^2} + C' \operatorname{sen} \frac{4gx}{a^2 + 4g^2}\right)$. Così se si abbia $y - \frac{4dy}{5dx} + \frac{ddy}{5dx^2} = 0$, sarà $a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $g = \frac{1}{5}$ ed $y = e^{2x}(C \cos x + C' \operatorname{sen} x)$.

966. Nel modo stesso potranno integrarsi due equazioni

$y + ax + \frac{bdx}{dt} = 0$, $y + fx + \frac{gdy}{dt} = 0$, supposte a, b, f, g costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l' indeterminata m e si sommi con la prima, verrà $(m+1)y + (a + fm)x + (gmdy + bdx)\frac{1}{dt} = 0$; onde fatto come sopra (964), $(m+1)y + (a+fm)x = \frac{1}{m}\int(gmdy + bdx) = gy + \frac{bx}{m}$, si avrà $m+1 = g$, $a + fm = \frac{b}{m}$ ed $\frac{am + fm^2}{b} = g - m$, equazione che determina m. Quindi se sia $(m+1)y + (a+fm)x = u = gy + \frac{bx}{m}$ e perciò $mdu = gmdy + bdx$, l' equazione sommata diverrà $u + \frac{mdu}{dt} = 0$ e avremo al solito $u = Ce^{-\frac{t}{m}}$. Il rimanente si fa come sopra (964), e tutto ciò ha luogo quando pur l' equazioni sieno $y + ax + \frac{bdx + cdy}{Tdt} = 0$, $y + a'x + \frac{b'dx + c'dy}{Tdt} = 0$, e si trova $u = Ce^{-\int\frac{Tdt}{m}}$.

967 Sia anche l' equazione $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} = X$ ove X è funzione di x. Tutto si farà come sopra (964), se non che l' equazione è qui $\frac{u}{m} - \frac{du}{dx} - \frac{X}{m} = 0$ che dà (963) $u = e^{\frac{x}{m}}\left(C - \frac{1}{m}\int e^{-\frac{x}{m}} Xdx\right)$. Così avendo $y - \frac{dy}{dx} - \frac{3ddy}{4dx^2} = 2x$, sarà $a = -1$, $b = -\frac{3}{4}$, $m' = \frac{3}{2}$, $m'' = -\frac{1}{2}$, $X = 2x$, $u' = Ce^{\frac{2}{3}x} + 2x + 3$, $u'' = C'e^{-2x} + 2x - 1$ (923), ed $y = \frac{1}{4}C'e^{-2x} + \frac{3}{4}Ce^{\frac{2x}{3}} + 2(x+1)$.

968. Questo metodo che a cagione dell'indeterminate m ec. introdotte nell' equazioni, si chiama *dei Coefficienti In-*

determinati, vale anche per l' equazioni lineari di un qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n-1$ d' equazioni $mp-\frac{mdy}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$, $gr-\frac{gdq}{dx}=0$ ec., si integreranno con la stessa facilità: il giro però sarà in queste più lungo, attese l' equazioni $n-1$ da cui debbon dedursi i valori dell' indeterminate k, g ec. dati per m, e quelle del grado $(n-1)^{simo}$ dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''' ec. e quindi u', u'', u''' ec.

Del resto, con le due equazioni $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ si integrano anche quelle di second' ordine ove manchi y o x o sia integrabile la risultante equazione di prim' ordine tra x o y e p: allora p sarà dato per x o per y e si avrà $y=\int pdx$ o $x=\int\frac{dy}{p}$. Così da $dx^2+dxdy-Xd^2y=0$ risulta l' integrabile $\frac{dp}{1+p}=\frac{dx}{X}$: e da $d^2y+mdxdy+nydx^2=0$ risulta $q+mp+ny=0=qdy+mpdy+nydy=pdp+mpdy+nydy$, parimente integrabile perchè omogenea (961).

Ma l'omogenee di second' ordine, in cui dx, d^2x ec. si valutano per una dimensione, posson sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y=ux$ e $qx=z$, che atteso $dy=pdx$ e $dp=qdx=\frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{z}$: così $aydx^2-bxdxdy+gy^2d^2y=0$ diventa $au-bp+gu^2qx=0=au-bp+gu^2z$, onde $z=\frac{bp-au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u}=\frac{gu^2dp}{bp-au}$ e $dp=\ldots\frac{(bp-au)du}{(p-u)gu^2}$, equazion del prim' ordine che se possa separarsi (come nel caso di $a=b$) separerà anche l' altra $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Anzi tali equazioni si ridurranno, sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual' è $yd^2y-dy^2-Xydxdy=0$; poichè fatto $p=\frac{dy}{dx}=uy$, $q=\frac{dp}{dx}=yz$ onde $dy=uydx$, $dp=yzdx=udy+ydu$, $\frac{dy}{y}=udx=\frac{zdx-du}{u}$, ella diventa $yqdx^2-$

$yqdx^2 - p^2dx^2 - Xypdx^2 = 0 = z - u^2 - uX$, che dà $udx = \frac{(u^2 + uX)dx - du}{u}$, onde $\frac{du}{u} = Xdx$, equazione separata del prim' ordine che separa anche $\frac{dy}{y} = udx$.

L' equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D' ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo quì varj esempj di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second' ordine, ove X, Y esprimon sempre una funzione di x o di y.

I. $x^2dx^2 + axydxdy = bdy^2$: compiendo il quadrato si ha $(xdx + \frac{1}{2}aydy)^2 = (\frac{1}{4}a^2y^2 + b)dy^2$, ed estraendo la radice, $xdx = \frac{1}{2}dy[\sqrt{(a^2y^2 + 4b)} - ay]$.

II. $4a^2x^2dx + 4a^2bxdx + 4abyxdx + 2ab^2ydx + b^2y^2dx - ab^3dy = 0$. Osservo che l' equazione può scriversi così: $(2ax + by + ab)^2dx - a^2b^2dx - ab^3dy = 0$; e supposto $(2ax + by + ab)^2dx = 0$; verrebbe $y = -\frac{2ax}{b} - a$. Faccio dunque $y = z - \frac{2ax}{b} - a$, $dy = dz - \frac{2adx}{b}$, e sostituendo e riducendo, viene $dx = \frac{abdz}{a^2 + z^2}$.

III. $-a^3dx - 3yx^2dx + 3y^2xdx - y^3dx + x^3dy + a^3dy = 0$. Osservo che supposto $3yxdx(y - x) = 0$, verrebbe $y = x$, il che si avrebbe anche dall' equazioni combinate $-dx(a^3 + y^3) = 0$, $dy(x^3 + a^3) = 0$. Faccio dunque $y = z + x$, $dy = dz + dx$, e sostituendo e riducendo, viene $\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{a^3 + x^3}$.

IV. $x^2dx + xydy + y^2dx = Xdx$: fatto $xy = z$, si ha $zdz = (X - x^2)xdx$.

V. $2ydy + xdy + ydx = (a + x + y)Ydy$; fatto $x + y = z$, viene $ydz + zdy = (a + z)Ydy$: fatto $yz = u$, viene $du - \frac{uYdy}{y} = aYdy$: fatto $\frac{Ydy}{y} = \frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$: fatto $\frac{u}{q} = p$, viene infine $dp = \frac{aYdy}{q}$.

VI. $\frac{2x^2dx+xydy+y^2dx}{x^4+x^2y^2+a^4}=\frac{xdx+ydy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$: fatto $x^2+y^2=z^2$, viene $\frac{z(xdz+zdx)}{x^2z^2+a^4}=\frac{dz}{a^2}$: fatto $zx=p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2+a^4}=\frac{dz}{z}$.

VII. $(a^2-x^2)dy+yxdx=adx\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$; fatto $a^2-x^2=\frac{y^2}{u^2}$ onde $-xdx=\frac{uydy-y^2du}{u^3}$, verrà $\frac{y^2du}{u^2}=adx\sqrt{(u^2-1)}$ e $\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}}=\frac{adx}{a^2-x^2}$.

VIII. $\frac{Ydy}{x^2}=aY'dy-\frac{dx}{x}$: fatto $aY'dy=\frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^2}=\frac{xdz-zdx}{zx^2}$: fatto $\frac{z}{x}=p$, viene $\frac{Ydy}{z^2}=\frac{dp}{p^3}$.

IX. $-\frac{a^3dx}{x}+bydx=aydy$: fatto $bx-ay=az$, viene $bxdz=azdz+\frac{a^3dx}{x}$: fatto $zdz=\frac{a^2dp}{p}$: viene $bxdz=\frac{a^3(pdx+xdp)}{px}$: fatto $px=u$, viene $\frac{bdz}{p}=\frac{a^3du}{u^2}$.

X. $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}}+\frac{(m+1)bydx}{x}+\frac{(m+1)y^2dx}{x}=ydy$: cioè $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}}+\frac{(m+1)bydx}{x}=y^2\left(\frac{dy}{y}-\frac{(m+1)dx}{x}\right)$: fatto $ly-(m+1)lx=lp$, $y=px^{m+1}$, viene $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}}+(m+1)bpx^m\times dx=px^{2m+2}dp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}}(-1+(m+1)a^{m-1}bp)=a^{m-1}pdp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}}=\frac{a^{m-1}pdp}{(m+1)a^{m-1}bp-1}$.

XI. $mydx+nxdy=y^rdy$ ovvero $xy\left(\frac{mdx}{x}+\frac{ndy}{y}\right)=y^rdy$: fatto $mlx+nly=lp$, $x^my^n=p$, viene $\frac{dp}{p}\sqrt[m]{\frac{p}{y^n}}=y^{r-1}dy$, cioè $\frac{dp}{\sqrt[m]{p^{m-1}}}=dy\sqrt[m]{y^{n+m(r-1)}}$.

XII. $\frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$: fatto $x = pz$, $y = p\sqrt{(1 - z^2)}$, viene $\frac{-dz}{\sqrt{(p^2dz^2 + dp^2(1-z^2))}} = p$: fatto $dz = udp$, quadrando, sostituendo il valor di $u = \frac{dz}{dp}$ ed estraendo la radice, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{pdp}{\sqrt{(1-p^4)}}$.

XIII. $aydy = y^2dx + x^2dx$ cioè $x^2dx = y^2 \left(\frac{ady}{y} - dx\right)$: fatto $aly - x = lz$, $\frac{y^a}{e^x} = z$, $y = \sqrt[a]{e^x z}$, viene $x^2dx = \frac{dz}{z}\sqrt[a]{e^{2x}z^2}$, cioè $\frac{x^2dx}{\sqrt[a]{e^{2x}}} = \frac{dz}{\sqrt[a]{z^{a-2}}}$.

XIV. $dy = \frac{yxdx}{x^2-a^2} - \frac{y^3dx}{x^3}$: fatto $x^2 - a^2 = z^2$, $y = pz$, $dy = zdp + pdz = zdp + \frac{pxdx}{z}$, viene $zdp + \frac{pxdx}{z} = \frac{pxdx}{z} - \frac{z^3p^3dx}{x^3}$, cioè $\frac{dp}{p^3} = \frac{(a^2-x^2)dx}{x^3}$.

XV. $(x+y)^2dy = a^2dx$: fatto $x+y = z$, si ha $z^2(dz - dx) = a^2dx$, cioè $dx = \frac{z^2dz}{a^2+z^2}$.

XVI. $\frac{y^2dx - xydy}{\sqrt{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)}} = Y$: fatto $\frac{x}{y} = z$ onde $x = yz$ e $dx = ydz + zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2 - z^2dy^2 + dy^2)}} = Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene $\frac{dz^2}{1-z^2} = \frac{Y^2dy^2}{y^4 - Y^2y^2}$, cioè $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \ldots\ldots \frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2-Y^2)}}$.

XVII. $\frac{ddy}{dx^2} - \frac{dy^2}{ydx^2} - \frac{ady^2}{(1+ay)dx^2} + 2ay(1+ay) = 0$, cioè $\frac{ddy}{y(1+ay)} - \frac{(1+2ay)dy^2}{y^2(1+ay)^2} + 2adx^2 = 0$, che fatta dx costante, si sa integrare (945).

XVIII. $2y^2dyddy\sqrt{xy}+y^2dy^3\sqrt{\frac{x}{y}}=dx^2(ydx-xdy)$ ove dx è costante: fatto $\frac{x}{y}=z$, viene $ydy^2=dx^2\,(2\sqrt{z}+C)$.

XIX. $xddx+dx^2=-\frac{yx^2dx^2}{a^3}$ ove dy è costante: fatto $xdx=zdy$, viene $\frac{a^3dz}{z^2}=-ydy$.

XX. $a^{2m}dy^{m-2}ddy=Xdx^m$ ove è costante dx: fatto $dy=zdx$, viene $a^{2m}z^{m-1}dz=Ydy$.

XXI. $adxdy=(2addx-2xddx-2ddy\sqrt{x}-dx^2)(a-x)\sqrt{x}$: se si faccia $a-x=p^2$ e $dy=pdz$, viene $\frac{adxdz}{2p^2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dpdz\sqrt{x}}{p}-ddz\sqrt{x}-\frac{dx^2}{2p}$, cioè posto il valor di $a=p^2+x$ e di $dx=-2pdp$, $ddz\sqrt{x}+\frac{dxdz}{2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dx^2}{2p}$ il cui integrale è $dz\sqrt{x}=pdx$ cioè $pdz\ (=dy)=\frac{p^2dx}{\sqrt{x}}+C$.

XXII. $Ydx^2-mdy^2-nyddy=0$ ove dx è costante: fatto $dx=zdy\sqrt[n]{y^m}$ onde $0=(\,dydz+zd^2y\,)\sqrt[n]{y^m}+\frac{mzdy^2}{n}\times\sqrt[n]{y^{m-n}}$, cioè $nyddy=-mdy^2-\frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}=-\frac{ndz}{z^3}$ e $dx=dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2\int(Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}+C)}}$.

969. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, posson generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati* $dy=ax^mdx+by^2dx$, sopra cui lasceremo che si consulti il Calcolo Integrale di Le-Seur e Iacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

Probl. I. Trovar la curva la cui suttangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{mx}{n}$. Si avrà dunque separando, $\frac{ndx}{x}=\frac{mdy}{y}$, e integrando, $nlx=mly+lC$; fatto dunque $x=y=c$, sarà $lC=(n-m)lc$, onde $y^m=x^nc^{m-n}$, equazione cercata.

FIG.

II. Qual' è la curva che ha per suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2+x^2}{x}$?
Si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$ ed integrando, $ly = l(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = lC(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $y = C\sqrt{(a^2+x^2)}$: fatto $x=0$, divien costante l' ordinata $y = Ca = b$, onde $C = \frac{b}{a}$; perciò $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$, equazione all' iperbola (767).

III. Qual' è la curva in cui lo spazio ABM $= \frac{m}{n}$ AMQ? si ha dunque $\frac{m}{n}\int xdy = \int ydx$ (946), $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$. 198.

IV. Trovar la curva BM il cui spazio ABMP eguagli l' arco BM moltiplicato per una costante a, onde $\int ydx = a\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Dunque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$; ed integrando, $\frac{x}{a} = l\frac{c}{a}[y+\sqrt{(y^2-a^2)}]$ (913). 199

V. Trovar la curva AM, in cui il raggio osculatore MC $= \frac{m}{n}$ MN. Poichè MO : MC :: MP : MN, supposta dx costante, sarà (869) $\frac{m}{n}y = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, ovvero $\frac{m}{n}yddy + dx^2 + dy^2 = 0$. Per integrare, sia $dx = pdy$ e differenziando, $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ e sostituendo nell' equazione, $\frac{ndy}{my} = \frac{dp}{p(p^2+1)}$; dunque $\frac{n}{m}l\frac{y}{c} = l\frac{p}{\sqrt{(p^2+1)}}$ (851), $p = \pm\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n}-y^{2n})}}}$, e $dx = \pm dy\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n}-y^{2n})}}}$, equazione differenziale del prim' ordine della curva cercata. Se $n=m$, si ha $dx = \pm ydy(c^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed $x = c' \pm\sqrt{(c^2-y^2)}$, equazione al circolo. Se $m = 2n$, si ha $dx = \frac{\pm dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}$, equazione alla cicloide. 200.

VI. Trovar la curva BM tale che conducendo per l' origine A dell' ascisse la retta AO che faccia coll' asse un 201.

201. angolo di 45°, stia sempre l'ordinata PM alla suttangente PT :: una retta data a: OM. Dunque $dy:dx::a:y-x$, e $adx=(y-x)dy$. Sia $y-x=z$ e si avrà $dx=dy-dz$, onde sostituendo nell' equazione, $\frac{dy}{a}=\frac{dz}{a-z}$, $\frac{y}{a}=l\frac{C}{a-z}$, ed $x=y-a+Ce^{-\frac{y}{a}}$, che potea trovarsi anche per i numeri 963 e 964. La minima ordinata BD si ha facendo $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y-x}=\infty$ (878) e allora $x=y=al\frac{C}{a}=BD=AD$. Lo spazio $DBMP=PQ-DC-BCQM=xy-a^2l^2\frac{C}{a}-\int xdy$ (946). Ora $\int xdy=\int(ydy-ady+Ce^{-\frac{y}{a}}dy)=C'+\frac{y^2}{2}-ay-aCe^{-\frac{y}{a}}$ (923), e sostituendo in $-ay$ il valor di $y=x+a-Ce^{-\frac{y}{a}}$, verrà $\int xdy=C'+\frac{y^2}{2}-ax-a^2$: ma quando lo spazio BCQM svanisce, si ha $y=AC=al\frac{C}{a}$ ed $x=CB=al\frac{C}{a}$, onde $C'=a^2+a^2l\frac{C}{a}-\frac{a^2}{2}l^2\frac{C}{a}$; dunque $\int xdy=\ldots$ $\frac{y^2}{2}-ax+a^2l\frac{C}{a}-\frac{a^2}{2}l^2\frac{C}{a}$, ed infine $DBMP=xy-\frac{y^2}{2}+ax+a^2l\frac{a}{C}+\frac{a^2}{2}l^2\frac{a}{C}$.

202. VII. Trovar la Curva EM che faccia per tutto coll'ordinata PM un angolo EMP o TMP proporzionale all' ascissa AP, che sarà perciò m^{pla} dell' arco o angolo TMP. Si avrà dunque $TMP=\frac{x}{m}$, e (646) $y:\frac{ydx}{dy}::1:tang\frac{x}{m}=\frac{dx}{dy}$; dunque $\frac{dy}{m}=\frac{dx}{m}cot\frac{x}{m}=\frac{\frac{dx}{m}cos\frac{x}{m}}{sen\frac{x}{m}}$, e però $y=C+ml\,sen\frac{x}{m}$; equazione che nel caso di $y=0$ dando $l\,sen\frac{x}{m}=-\frac{C}{m}=-$

$\frac{Cle}{m}$, cioè $sen\,\frac{x}{m} = e^{-\frac{C}{m}}$, e però $x = m \times$ *arco di circolo il cui seno è* $e^{-\frac{C}{m}}$, fa vedere che la curva incontra la linea dell' ascisse in punti E, F, E', F' ec. tali, che $l\,sen\,\frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$, ed x eguaglia m moltiplicata per tutti gli archi, i cui seni sono $= e^{-\frac{C}{m}}$. Ora il numero di questi archi è infinito; poichè se il primo è a, quelli che avranno lo stesso seno saranno a, $c - a$, $2c + a$, $3c - a$, $4c + a$, $5c - a$, ec. (618): quindi le distanze a cui la curva incontrerà la linea dell ascisse saranno espresse per ma, $m(c-a)$, $m(2c+a)$, $m(3c-a)$ ec. Presa dunque $AE = ma$, $AF = mc - ma$, $AE' = 2mc + ma$, $AF' = 3mc - ma$ ec., si avranno i valori positivi di x. Si troveranno parimente i suoi valori negativi, cioè le ascisse prese verso la sinistra di AS, e si vedrà inoltre che gli intervalli EF, E'F' ec. sono eguali.

Fatto ora $\frac{dy}{dx} = cot\,\frac{x}{m} = 0$ per avere il massimo, sarà (610.611) $sen\,\frac{x}{m} = 1$, e i valori che soddisfanno nel seno positivo a quest' equazione, preso $a = 90° = \frac{1}{2}c$ nella serie a, $c - a$, $2c + a$ ec. sono . . . .

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c,\ \text{ec.}$$

e poichè in questo caso $sen\,\frac{x}{m} = 1$ e $l\,sen\,\frac{x}{m} = 0$, si ha $y = C$; onde ai punti più elevati C, C' ec. le ordinate son eguali fra loro ed alla costante.

Se nell' equazione $y = C + l\,sen^n\,\frac{x}{m}$ si faccia $sen^n\,\frac{x}{m} = 0$, sarà $y = C + l0 = C - \infty$ (197) $= -\infty$, ovvero $-y = \infty$ e però a tutti gli archi o ascisse x che danno $sen^n\,\frac{x}{m} = 0$, corrisponde un'ordinata negativa $-y$ che è infinita o asintoto della curva: ora quest' archi sono $x = 0$, $x = \pm cm$, $x = \pm 2cm$ ec. in infinito; dunque la curva ha un numero infi-

202. nito d'asintoti perpendicolari all'asse. Il primo passa per l'origine dell'ascisse ove $n=0$ ed è AS, il secondo passa per D alla distanza AD $= cm$, il terzo ad una distanza AD' $=$ 2AD $= 2cm$ ec. Lo stesso è nel senso negativo.

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE.

970. Supposta $\delta x = 1$ (827), sia da integrarsi l'equazione lineare del prim' ordine $y' - py - X = 0$, ove $y' = y + \delta y$, e p, X son funzioni di x. Fatto $y = rz$, onde $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$, l'equazione si cangierà in $rz\,(p-1) - r\delta z - z\delta r - \delta r\delta z + X = 0$; e se sia $rz\,(p-1) - z\delta r = 0$ ovvero I. $pr = r + \delta r$, verrà $r\delta z + \delta r\delta z = X$, ovvero II. $\delta z = \frac{X}{pr}$. La I. si integra riducendola a $lp = l(r+\delta r) - lr = \delta\,(lr)$ (831), onde $lr = \sigma lp$ ed $r = e^{\sigma lp}$: perciò dalla II. si ha $\delta z = \frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, $z\ (= \frac{y}{r}) = \sigma \frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, ed $y = e^{\sigma lp}\left(\sigma \frac{X}{pe^{\sigma lp}} + C\right)$.

971. Poichè la somma σ di tutti i valori di lp dipende da x di cui p è funzione (970), ed $x = \delta\,(x - 1 + x - 2 + x - 3$ ec.) (824), si avrà σlp col cangiar successivamente x in $x-1, x-2, x-3 \ldots 3, 2, 1$, e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto (299) che chiamo $l\pi p$. Quindi $r = e^{\sigma lp} = e^{l\pi p} = \pi p$ (852) e chiamando p' il termine che viene immediatamente dopo p nella serie ec. $'p, p, p'$ ec., sarà $r + \delta r\ (= pr) = \pi p'$, e perciò $\delta z\ (= \frac{X}{pr}) = \frac{X}{\pi p'}$, $z = \sigma \frac{X}{\pi p'}$, ed $y = \pi p \left(\sigma \frac{X}{\pi p'} + C\right)$. Così data $y + (x+1)\delta y + a(2x+1) = 0$, sarà $-\frac{1}{p-1} = x+1$, $p - 1 = -\frac{1}{x+1}$, $p = \frac{x}{x+1}$, $\pi p = \ldots$ $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \ldots 3.2.1 = \frac{1}{x}$, $p' = \frac{x+1}{x+2}$, $\pi p' = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \ldots 3.2.1 = \frac{1}{x+1}$, $\frac{X}{p-1} = a\,(2x+1)$, $X = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$, ed $y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x+1)) = (827)\,\frac{C}{x} - ax$.

Supposta

Supposta costante $p=f$, saranno $\pi f, \pi f'$ dei prodotti f^n, f^{n+1} di f moltiplicata per se stessa tante volte $n, n+1$ quanti sono i termini che precedono y, y' nella serie ec. ${}^{(n)}y \ldots {}''y, {}'y, y, y'$ ec., ed in tal caso si avrà $y=f^n(C+\sigma\frac{X}{f^{n+1}})$; e se sia costante anche $X=g$, il rimanente integrale $\sigma\frac{1}{f^{n+1}}$ esprimerà la somma $\frac{f^n-1}{f^n(f-1)}$ (258) della progression geometrica $\frac{1}{f^n}, \frac{1}{f^{n-1}} \ldots \frac{1}{f}$, cioè la somma di tutti i valori che si hanno da $\frac{1}{f^{n+1}}$ cangiando successivamente n in $n-1, n-2 \ldots 3, 2, 1$; si avrà dunque allora $y=Cf^n+\frac{g(f^n-1)}{f-1}$.

Può sciogliersi con questo metodo il bel Problema già proposto di sopra (390. XXIV.). Se come ivi, sia c la sorte impiegata al frutto semplice di m per 1, t gli anni in cui vuol consumarsi la sorte e il frutto, ed x la somma costante che dee spendersi annualmente, supporrò che nell'anno n^{simo} la sorte sia ridotta ad y, onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende x, la sorte nel seguente anno $(n+1)^{simo}$ sarà $y'=(m+1)y-x$, equazione da cui si ha $p=f=m+1$, $X=g=-x$, ed $y=C(m+1)^n-\frac{x[(m+1)^n-1]}{m}$: ma quando gli anni sono $n=1$ si ha la sorte $y=c$; dunque $c=C(m+1)-x$, $C=\frac{c+x}{m+1}$ ed $y=\frac{x}{m}+(c-\frac{x}{m})(m+1)^{n-1}$. Or tutto vuol consumarsi negli anni $n=t$, e perciò nell'anno $n=t+1$ dee aversi $y=0$; dunque $0=\frac{x}{m}+(c-\frac{x}{m})(m+1)^t$ e la somma cercata $x=\frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t-1}$.

972. Sia anche l' equazion lineare del second' ordine $y+a\delta y+b\delta^2 y=X$ in cui a, b son costanti e $\delta x=1$. Se-

condo il metodo dei coefficienti indeterminati (964) pongo $mp - m\delta y = 0$ e sommate le due equazioni, viene I^{a}. $y + (a+m)p - m\delta y + b\delta p = X$. Supposto al solito (964) $y + (a+m)p = \frac{1}{m}\sigma(m\delta y - b\delta p) = y - \frac{bp}{m}$, abbiamo $a + m = \frac{-b}{m}$ con che si determinano i valori m', m'' di m (964); e fatto II. $y + (a+m)p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $\delta u = \delta y - \frac{b\delta p}{m}$ ovvero $m\delta u = m\delta y - b\delta p$, la I. equazione diverrà $u - m\delta u = X$ che ci dà (971) $u = \pi(1 + \frac{1}{m})$ $\left(C - X \ldots \sigma \frac{X}{m \cdot \pi(1 + \frac{1}{m'})}\right)$; onde fatta la costante $1 + \frac{1}{m} = h$ e però $m = \frac{1}{h-1}$, si avrà $u = h^{n}\left(C - (h-1)\sigma \frac{X}{h^{n+1}}\right)$ (971); e se anche X fosse costante, verrebbe $u = h^{n}\left(C - (h-1)X\sigma \frac{1}{h^{n+1}}\right) = Ch^{n} - X(h^{n} - 1)$ (971). Posti pertanto in queste i due valori m', m'' di m o h', h'' di h, si avranno i due u', u'' di u ed $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$ (964).

Vale il metodo stesso per l' equazioni simili del terzo, quarto, r^{simo} ordine (966.968).

973. Bisogna trattare al solito (965) l' equazione $qy + a\delta y + b\delta^{2}y \ldots + \omega\delta^{r}y = X$ quando $q = 0$, o resta solamente $\omega\delta^{r}y = X$. In quest' ultimo caso sia $\omega = 1, r = 4, X = 0$, e dovrà integrarsi $\delta^{4}y = 0$ ovvero $\frac{\delta^{4}y}{\delta x^{3}} = 0$: dunque 1°. $\sigma\frac{\delta^{4}y}{\delta x^{3}} = \frac{\delta^{3}y}{\delta x^{3}} = C$, o $\frac{\delta^{3}y}{\delta x^{2}} = C\delta x$; 2°. $\sigma\frac{\delta^{3}y}{\delta x^{2}} = \frac{\delta^{2}y}{\delta x^{2}} = C\delta x\sigma 1 + C' = (827)$ $Cx + C'$, o $\frac{\delta^{2}y}{\delta x} = \delta x Cx + C'\delta x$; 3°. $\sigma\frac{\delta^{2}y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} = C\delta x\sigma x + C'\delta x\sigma 1 + C'' = (827)\, C(\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{2}x) + C'x + C''$, o $\delta y = C\delta x(\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{2}x) + \delta x C'x + C''\delta x$; 4°. $\sigma\delta y = y = C\delta x\sigma\frac{1}{2}x^{2} - C\delta x\sigma\frac{1}{2}x + C'\delta x\sigma x + C''\delta x\sigma 1 + C''' = (827)\, C(\frac{1}{6}x^{3} - \frac{1}{4}x^{2} +$

$\frac{1}{12}x) - C(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x) + C'(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + C''x + C''' = \frac{1}{6}Cx^3 + \frac{1}{2}(C' - C)x^2 + (\frac{1}{3}C - \frac{1}{2}C' + C'')x + C'''$.

974. Si applica questa dottrina a varie specie di *Serie Ricorrenti*: noi ci limiteremo alle più semplici. Già si sa (273) che l'equazione $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2$ ec. si riduce a

$$o = \begin{cases} a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + a^2Ex^4 + \text{ ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + 2aDx^4 + \text{ ec., e i due} \\ \quad - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \text{ ec.} \end{cases}$$

primi coefficienti A, B si determinano dall'equazioni $a^2A - a^2 = o$, $a^2Bx + 2aAx = o$: riguardo agli altri C, D, E ec., si ha $C = \frac{-2B}{a} + \frac{A}{a^2}$, $D = \frac{-2C}{a} + \frac{B}{a^2}$, $E = \frac{-2D}{a} + \frac{C}{a^2}$ ec., d'onde la serie ricorrente $1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} + \frac{29x^4}{a^4}$ ec. $= \frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$ *rotto genitore* della serie. Ora le costanti quantità $\frac{-2}{a}$, $+\frac{1}{a^2}$ dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A ovvero C, B ovvero D, C ec. che precedono, nasce ciascun coefficiente C, D, E ec. che segue, si chiamano *scala di relazione*: ed è facile osservare 1°. che *la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha la variabile nel denominatore ordinato del rotto genitore presi con segni contrarj e divisi per i termini costanti*: 2°. che *per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec., e far la somma di tutto*. Così il rotto $\frac{1 + z + z^2}{1 - z - z^4 + z^5}$ si cangia nella serie $1 + 2z + 3z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8$ec., la cui scala di relazione (mancando z^2, z^3) sarà 1, +0, +0, +1, −1, e supposti trovati i primi cinque coefficienti 1, 2, 3, 3, 4, per avere il sesto, il settimo ec., si farà $1.4 + 0.3 + 0.3 + 1.2 - 1.1 = 5$ coefficiente del sesto termine, $1.5 + 0.4 + 0.3 + 1.3 - 1.2 = 6$, coefficiente del settimo ec.

975. Data dunque una serie ricorrente $f + gx + hx^2 + kx^3$ ec. con la scala di relazione p, $+q$, $+r$ ec., la sua somma all'infinito sarà un rotto genitore $\frac{s + tx + ux^2 \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ec.}}$

$(823)\, y = \frac{Ca(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{-2\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)} - \frac{(a+2\omega)Cg^n}{-2\omega a^n} = [\,Cn -$

$\frac{Cg}{a}(n-1)\,]\,\frac{g^{n-1}}{a^{n-1}}$; onde fatto $\frac{Cg}{a} = C'$ e restituito il valor di $g = a - 2$, si ha $y = [\,Cn - C'(n-1)\,]\left[\frac{a-2}{a}\right]^{n-1}$: così data la serie $1 + 7x + 24x^2 + 68x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, +r = 4, -4$, sarà (976) $a = -2$ ed $y = [\,Cn - C'(n-1)\,]\,2^{n-1}$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 7$, sarà $C' = 2$, $C = 7$ ed $yx^n = [\,7n - 2(n-1)\,]\,2^{n-1}x^n$. Gli immaginarj non fanno quì difficoltà, come può vedersi nella serie $1 + 2x - x^2 - 12x^3 - 19x^4$ ec. la cui scala è $2, -5$, e il cui termine generale (fatto $2\sqrt{-1} = g$) si trova $yx^n = \frac{[\,(1+g)^{n+1} - (1-g)^{n+1}\,]\,x^n}{2g}$ senza immaginarj.

978. Anche nell' Analisi del *Caso* e della *Probabilità* si adoperano le differenze finite. Chiamando noi fortuito o *casuale* un successo allorchè ignoriamo le cagioni che posson farlo avvenire, siamo costretti a riguardar come *egualmente probabile* l' esistenza o inesistenza di due successi casuali se l' uno o l' altro dovendo necessariamente accadere, non vi sia maggior ragione per cui l' uno debba accader piuttosto che l' altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l' esistenza di tre avvenimenti che a vicenda escludendosi mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma quì l' inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel rapporto di 2 a 1, perchè di tre casi possibili l' inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità Π, Π' dell' esistenza o inesistenza d'un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente è più grande o più piccolo il numero dei casi F, C a lei favorevoli o contrarj, e quanto reciprocamente è più piccolo o più grande quello dei casi possibili P; onde sarà $\Pi = F \times \frac{1}{P} = \frac{F}{P}$ e $\Pi' = C \times \frac{1}{P} = \frac{C}{P}$; e poichè i casi favorevoli F insieme coi contrarj C formano i casi possibili P, cioè $F + C = P$, si avrà $\Pi + \Pi' = 1$ ed 1 rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabi-

lità si determina la *speranza* Σ degli interessati all' esistenza dell' avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata S e dalla probabilità Π d'ottenerla, cioè $\Sigma = \Pi S = \frac{FS}{P}$. Ecco ora un Problema sulle probabilità per far vedere come si applichino a somiglianti ricerche le Differenze finite.

Presa a caso una quantità di monete da un mucchio n di esse, determinar la probabilità che il numero preso sia pari o caffo, supponendo che possa prendersi una sola moneta, o più, o tutte. Chiamando y i casi in cui il numero preso può esser pari, e z quelli in cui può esser caffo, una nuova moneta aggiunta al mucchio e combinata coi precedenti casi in caffo, gli renderà tutti pari, onde allora la somma dei pari sarà I°. $y' = y + z$; ma combinata coi precedenti casi pari, gli cangierà tutti in caffo oltre l' unità aggiunta che è caffo, onde la somma dei casi in caffo sarà II°. $z' = z + y + 1$. La I. dà $y + \delta y = y + z$ cioè $\delta y = z$ e però $\delta^2 y = \delta z$: dalla II. si ha $z + \delta z = z + y + 1$ cioè $\delta z (= \delta^2 y) = y + 1$ e però $y - \delta^2 y = -1$, equazione da cui abbiamo (823) $a = 0, b = -1, X = -1, m' = 1, m'' = -1, h' = 2, h'' = 0, u' = (C+1)2^n - 1, u'' = -1$ ed $y = (C + 1)2^{n-1} - 1$; ma quando $n = 1$ non si hanno casi pari e però $y = 0$; dunque $C = 0$, $y = 2^{n-1} - 1, y' = 2^n - 1, z (= y' - y) = 2^{n-1}$. Ora i casi y pari coi casi z in caffo danno i casi possibili $P = y + z = 2^n - 1$; dunque la probabilità per i casi pari è $\Pi = \frac{F}{P} = \frac{y}{y+z} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$, e quella per gli impati $\Pi' = \frac{C}{P} = \frac{z}{y+z} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$; e poichè $2^{n-1} > 2^{n-1} - 1$, la scommessa per il numero caffo sarà sempre più vantaggiosa che per il pari.

INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI.

979. Supposta z una funzione di più variabili x, y ec., diconsi *a differenze parziali del prim' ordine* quelle equazioni in cui z, x, y ec. vanno unite con $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$ ec. (935); *del secondo* allorchè oltre z, x, y ec., $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$ ec., trovansi

anche $\frac{dd^x z}{dx^2} = \frac{d^{2x} z}{dx^2}$, $\frac{dd^y z}{dy^2} = \frac{d^{2y} z}{dy^2}$ ec., $\frac{d^x d^y z}{dx dy} = \frac{d^y d^x z}{dy dx}$ ec. (935), differenze parziali seconde, che nascono e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per x, $\frac{d^y z}{dy}$ per y ec. essendo costanti dx, dy ec., e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per y o $\frac{d^y z}{dy}$ per x ec.: così si dica degli altri ordini successivi. Tali equazioni qualche volta s' incontrano nell' alta Geometria, e assai spesso nella Fisica Matematica più sublime: ma come il Calcolo Infinitesimale suppone perfetta l' Algebra, così quello dell' equazioni a differenze parziali suppone perfetto l' Infinitesimale. Per esempio, qui si assume che possa sempre trovarsi il fattore m che rende esatta la differenziale qualunque $Pdx + Qdy$ (959), e si riguarda come integrata un' equazione a differenze parziali quando è ridotta all' integrazion d' un' equazione a differenze ordinarie: se il fattore non possa aversi o se non si possa integrare l' equazione differenziale, il difetto sarà dei Calcoli inferiori, non di quello di cui trattiamo. Eccone alcune più elementari nozioni.

980. Se z sia funzione di x, y, si avrà $dz = Pdx + Qdy = d^x z + d^y z$ e però $\frac{d^x z}{dx} = P$, $\frac{d^y z}{dy} = Q$ (936). Dal che si raccoglie 1°. che l' espressioni $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ son quantità variabili ma finite, denotanti il coefficiente P o Q di dx o di dy quando si differenzia z o per x o per y: 2°. che se nella differenziazione di z si prenda x o y costante, si ha $dz = d^y z = Qdy$ o $dz = d^x z = Pdx$, e l' integrale di queste equazioni sarà $z = \int^y Qdy + C$ o $z = \int^x Pdx + C'$ ove potrà essere $C = \varphi(x)$, $C' = \varphi(y)$ (936. 2°.) se d' altra parte non si sappia che tali funzioni non hanno luogo: 3°. che avendosi $\int Pdx = Px - \int xdP$, e $\int Qdy = Qy - \int ydQ$ (916), sarà $z = \int Pdx + \int Qdy = Px + Qy - \int(xdP + ydQ) = \frac{xd^x z}{dx} + \frac{yd^y z}{dy} - \int\left(x . d\left(\frac{d^x z}{dx}\right) + y . d\left(\frac{d^y z}{dy}\right)\right)$.

981. Dico

981. Dico ora che se z sia una funzione di x,y onde $dz = d^x z + d^y z$, ella sarà anche una funzione di x,u (supposta u funzione di x,y) cosicchè denotando con $d'^x z$ la differenza di z per la nuova x, si avrà $dz = d'^x z + d^u z$. Infatti se $z = ax + by = nax + by - (n-1)ax = \ldots \frac{(ax+by)}{x^n} x^n =$ ec., potrà farsi $u = nax + by$, $u = by - (n-1)ax$, $u = \frac{ax+by}{x^n}$, $u = (ax+by)x^n$, $u =$ ec., ed u sarà sempre funzione di x,y, onde z lo sarà anche di x,u. Perciò u è indeterminata e suscettibile d' infinite forme differenti.

982. Anzi può u soggettarsi a soddisfare ad una condizione richiesta, per esempio, che sia tale onde abbiasi $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$, intendendo per p una data funzione di x,y; poichè preso dall' equazione proposta e sostituito in $du = d^x u + d^y u$ il valor di $d^x u$, si avrà $du = d^y u - \frac{pdxd^y u}{dy} = \frac{d^y u}{dy}(dy - pdx)$: dunque supposto m il fattore che rende esatta la differenziale $dy - pdx$ (959) onde si abbia $mdy - mpdx = dt$, verrà $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot \frac{dt}{m}$; dunque u è funzione di t, ed essendo u indeterminata (981), può farsi $u = t$ onde $\frac{d^y u}{dy} = m$, valori che danno $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$. Così se si voglia u di modo che sia $\frac{d^x u}{dx} - \frac{yd^y u}{xdy} = 0$, avremo $p = -\frac{y}{x}$ e $dy - pdx = dy + \frac{ydx}{x}$, differenziale esatta se si moltiplichi per $m = x = \frac{d^y u}{dy}$; dunque $xy = t = u$ e $\frac{d^x u}{dx} - \ldots \frac{yd^y u}{xdy} = y - \frac{yx}{x} = 0$.

983. Considerando dunque z come funzione di x,y e

di x,u, si avrà $dz = d^x z + d^y z = d'^x z + d^u z$ (981): ma $du = d^x u + d^y u$ ovvero $du d^u z = (d^x u + d^y u) d^u z$, e però $d^u z = \frac{d^u z}{du}(d^x u + d^y u)$; dunque $dz = d'^x z + \frac{d^u z}{du}.d^x u + \frac{d^u z}{du} d^y u = d^x z + d^y z$, e quindi (980) $d^x z = d'^x z + \frac{d^u z}{du}. d^x u$ e $d^y z = \frac{d^u z}{du}. d^y u$.

984. Ciò premesso, poco vi vuole a integrar l' equazioni lineari del prim' ordine a tre variabili, che tutte comprendonsi nella generale $\frac{d^x z}{dx} + \frac{p d^y z}{dy} + q = 0$, essendo p una data funzione di x, y, mentre q può esserlo di x, y, z. Poichè sostituiti in essa i valori di $d^x z, d^y z$ (983), si ha $\frac{d'^x z}{dx} + \frac{d^u z}{du}\left(\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy}\right) + q = 0$; e fatto $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0$ per determinar u (982), viene $\frac{d'^x z}{dx} + q = 0$. Posto dunque in q il valor di y ricavato da quello di u, onde q si cangi in q', avremo $d'^x z + q' dx = 0$: ma z è quì funzione di x, u e manca $d^u z$; dunque u è costante (980.2°.); dunque $d'^x z = dz = - q' dx$, dunque $z = -\int^x q' dx + \varphi\ (u)$ (980.2°.).

Esempio. Debba integrarsi $\frac{d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{x dy} + \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$: avremo $p = \frac{y}{x}, q = \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0 = \frac{d^x u}{dx} + \frac{y d^y u}{x dy}$. Da questa equazione si ha (982) $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{y dx}{x}\right)$, e poichè il fattore $m = \frac{1}{x}$ rende esatta la differenziale $dy - \frac{y dx}{x}$, verrà $\frac{y}{x} = t = u$, $y = ux$,

$q' = \frac{z}{ux} - ax\sqrt{(1+u^2)}$, e dovrà integrarsi $dz = -\frac{zdx}{ux} + axdx\sqrt{(1+u^2)}$ ovvero $uxdz + zdx = aux^2dx\sqrt{(1+u^2)}$ fatta u costante; integrando pertanto (968. XI.) e restituito quindi il valor di $u = \frac{y}{x}$, si ottiene $z = \frac{ayx\sqrt{(x^2+y^2)}}{2y+x} + u^{-\frac{x}{y}}\varphi(\frac{y}{x})$.

985. Ho supposta p una data funzione di x, y: ma si deve aggiungere che può essere anche funzione di x, y, z, senza che si alteri l'operazione. Per dimostrarlo basta osservare che da un'equazione $z - axz = by$ può aversi o $z = \frac{by}{1-ax}$, valore assoluto di z, o $z = axz + by$, valore che determina z quando essa nel secondo membro si riguardi come una costante. In tal caso u che era funzione di x, y (980), lo sarà anche di x, y, z, e perciò nell'equazione $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$ (982) potrà esserlo anche p, ma z vi si dovrà prender per costante, e quindi tutte l'operazioni dovranno farsi nella consueta maniera. Così per l'equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{xzd^y z}{y^2dy} = 0$ si ha $p = \frac{xz}{y^2}, q = 0, du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{zxdx}{y^2}\right)$, il fattore $m = y^2$, onde $u = \frac{y^3}{3} - \frac{zx^2}{2}$ e $z = \varphi(u) = \varphi(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}zx^2) = \varphi(2y^3 - 3zx^2)$.

Nè faccia stupore se quì si sopprime il denominator 6; poichè le costanti soppresse, o sieno coefficienti o esponenti o denominatori comuni, ricompariscono in seguito allorchè si determina la forma delle funzioni φ secondo certe condizioni assegnate. Per esempio se si voglia la forma della funzione φ tale che fatto $y = mx$ nell'equazione $z = \varphi(y^2 + x^2)$, si abbia $z = \frac{x^2}{a}$, è chiaro che sostituiti i valori di z ed y, l'equazione diverrà $\frac{x^2}{a} = \varphi(x^2 + m^2x^2)$; onde posto $u = x^2 + m^2x^2$ e però $x^2 = \frac{u}{m^2+1}$, si avrà $\varphi(u) =$

$\frac{u}{a(m^2+1)} = \frac{x^2+y^2}{a(m^2+1)} = \varphi(x^2+y^2) = z$; e si vede che in φ era stato soppresso il denominator costante $a(m^2+1)$. In tal guisa (per avvisarne quì di passaggio) si determinano le funzioni arbitrarie dell' equazioni a differenze parziali finchè almeno le condizioni assegnate per la loro determinazione possono esprimersi analiticamente.

986. Del resto, si integrano con questo metodo anche certe equazioni per cui si suol ricorrere alla formula accennata di sopra (980.3°.). Tale è l'equazione $\frac{d^x z}{dx} \cdot \frac{d^y z}{dy} = 1$, che ridotta a $\frac{d^x z}{dx} - \frac{dy}{d^y z} = 0$, ci dà $p = 0$, $q = -\frac{dy}{d^y z}$, $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot dy$, onde $u = y$, $q' = -\frac{du}{d^u z}$, e quindi $dz = \frac{du}{d^u z} dx$ cioè $z = \frac{xdy}{d^y z} + \varphi(y) = \frac{xd^x z}{dx} + \varphi(y)$: dunque differenziando z per y, si avrà $d^y z \left(= \frac{dx}{d^x z} dy\right) = dy\varphi'(y)$; ed integrando, $\frac{ydx}{d^x z} = \varphi(y) +$ una *Costante* che può esser funzione di $\frac{d^x z}{dx}$; dunque $\varphi(y) = \frac{ydx}{d^x z} - f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ e perciò $z = \ldots$ $\frac{xdy}{d^y z} + \frac{ydx}{d^x z} + f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$: cosicchè se sia $\frac{d^x z}{dx} = \frac{dy}{d^y z} = r$ onde $\frac{dx}{d^x z} = \frac{d^y z}{dy} = \frac{1}{r}$, verrà $z = rx + \frac{y}{r} - f(r)$, precisamente come si avrebbe dalla citata formula.

987. Per assicurarsi poi che l' operazione è ben fatta, si torna dall' integrale all' equazion differenziale 1°. differenziando tutta l' integrale per x, dal che in luogo di φ si ha φ' (853): 2°. differenziandola nuovamente per y dal che pure si ha φ' in luogo di φ: 3°. eliminando φ' per mezzo

delle due equazioni. Si integri al solito (984) l' equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{r^2 y d^y z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$, ove fatta $r^2 = m$, $s^2 = n$, sarà $p = \frac{my}{nx}$, $q = -\frac{mz}{x}$, $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{mydx}{nx}\right)$, il fattore $= \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, e perciò $\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}} = u$, $dz = \frac{mzdx}{x}$ e $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$ ovvero $\frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$: per ritornare alla data, differenzio questa per x e viene $\frac{x^m d^x z - mzx^{m-1}dx}{x^{2m}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{-my\sqrt[n]{x^{m-n}}\, dx\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{n\sqrt[n]{x^{2m}}}$; differenzio per y ed hò $\frac{d^y z}{x^m} =$

$\frac{dy\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}$; elimino φ', riduco, e trovo la data.

988. Sia ora da integrarsi l' equazion lineare dell' ordine n^{simo} e della forma $\frac{x^n d^{nx} z}{dx^n} + \frac{nx^{n-1} y d^{(n-1)x} d^y z}{dx^{n-1} dy} + \text{ec.} \ldots +$ $\frac{y^n d^{ny} z}{dy^n} = Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{ec.} \ldots\ldots + X\Psi\left(\frac{y}{x}\right) +$ $X'\Psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{ec.}$: e per render più facile l' intelligenza del metodo, riduciamola ad un caso particolare e sia I^a. $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3} +$ $\frac{3x^2 y d^{2x} d^y z}{dx^2 dy} + \frac{3xy^2 d^x d^{2y} z}{dx dy^2} + \frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3} = 0$. Pongo $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} +$ $\frac{2xy d^x d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = V$ (V è funzione di x, y) e differenziando prima per x e poi per y, viene II^a. $\frac{2xd^{2x} z}{dx} + \ldots$

$$\frac{x^2 d^{3x} z}{dx^2} + \frac{2y d^x d^y z}{dy} + \frac{2xy d^{2x} d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} d^x z}{dy^2} = d^x \text{ V, III}^2.$$

$$\frac{x^2 d^{2x} d^y z}{dx^2} + \frac{2x d^x d^y z}{dx} + \frac{2xy d^x d^{2y} z}{dx dy} + \frac{2y d^{2y} z}{dy} + \frac{y^2 d^{3y} z}{dy^2} = d^y \text{ V}.$$

Moltiplico la II. per $\frac{x}{dx}$, la III. per $\frac{y}{dy}$ e sostituiti nella data i valori di $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3}$ e di $\frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3}$, ella dopo la riduzione diventa $\frac{d^x \mathrm{V}}{dx} + \frac{y d^y \mathrm{V}}{x dy} - \frac{2\mathrm{V}}{x} = 0$, che integrata (984) dà $\mathrm{V} = x^2 \varphi(\frac{y}{x})$, onde l'integrale della I. sarà IV[2]. $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{2xy d^x d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = x^2 \varphi(\frac{y}{x})$. Questa nuovamente si integra ponendo $\frac{x d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{dy} = \mathrm{V}$, differenziando prima per x e poi per y, moltiplicando le due differenziali respettivamente per $\frac{x}{dx}, \frac{y}{dy}$, e sostituendo nella data i valori di $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$ e di $\frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2}$, che fatta la riduzione, la trasformano in $\frac{d^x \mathrm{V}}{dx} + \frac{y d^y \mathrm{V}}{x dy} - \frac{\mathrm{V}}{x} - x\varphi(\frac{y}{x}) = 0$, d' onde si ha $\mathrm{V} = x^2 \varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x})$ e per integrale della IV., $\frac{x d^x z}{dx} + \ldots . \frac{y d^y z}{dy} = x^2 \varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x})$. E finalmente per l' integrale di quest' ultima, che sarà l' integrale finita della I., si trova $z = \frac{x^2}{2} \varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x}) + f(\frac{y}{x})$. Così si trattano tutte l'altre della medesima forma e d' un ordine qualunque, e perciò anche l' equazione proposta in principio, giacchè il se-

condo membro $Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ec. non altera punto il giro delle prescritte operazioni.

989. E' però tanto simmetrica questa equazione, che il metodo d' integrarla si stimerà forse d' un uso assai raro. Eppure con esso integreremo più facilmente di quel che altri abbia fatto finora, l' equazioni *omogenee* di un ordine n^{simo}, quelle cioè che hanno tutti i termini con differenziali al medesimo grado e con coefficienti costanti. Sia, per esempio, l'equazione I^a. $\frac{d^{2x}z}{dx^2}+\frac{bd^x d^y z}{dxdy}+\frac{cd^{2y}z}{dy^2}=R$ ove R può esser funzione di x,y. Pongo II^a. $\frac{d^x z}{dx}+\frac{md^y z}{dy}=V$ (m è un coefficiente indeterminato), e differenziando al solito per x e per y, moltiplicando le differenziali respettivamente per $\frac{1}{dx}$, $\frac{c}{mdy}$, e sostituendo nella I. i valori di $\frac{d^{2x}z}{dx^2}$ e di $\frac{cd^{2y}z}{dy^2}$, ella (se si faccia III^a. $b-m-\frac{c}{m}=0$) diverrebbe IV^a. $\frac{d^x V}{dx}+\frac{cd^y V}{mdy}=R$. Ma quì bisogna osservare che la risoluzion della III^a. dando due valori m',m'' di m, la II^a. si scioglie nelle due $\frac{d^x z}{dx}+\frac{m'd^y z}{dy}=V$, $\frac{d^x z}{dx}+\frac{m''d^y z}{dy}=V$, d' onde viene $\frac{d^x z}{dx}=V$ ovvero $\frac{d^y z}{dy}=0$; dunque V non è ora funzione di x, y ma di x solamente; dunque la IV^a. dee ridursi a $\frac{dV}{dx}=R$ (980. 2°.), da cui abbiamo $V=\int^x Rdx$ senza la solita $\varphi(y)$ che si è trovata $=0$; dunque l' integrale della I. sarà $\frac{d^x z}{dx}+\frac{md^y z}{dy}=\int^x Rdx$, che nuovamente integrata (984) dà $z=\int dx\int^x Rdx+\varphi(y-mx)$ ricordandosi di mettere in R il valor di $y=u+mx$ (984) prima di integrar $\int^x Rdx$: ma dai due valori m',m'' di m si ha

$z=\int dx\int^x Rdx+\varphi(y-m'x)$ e $z=\int dx\int^x Rdx+f(y-m''x)$; dunque sommando verrà finalmente $z=\int dx\int^x Rdx+\frac{1}{2}\varphi(y-m'x)+\frac{1}{2}f(y-m''x)=\int dx\int^x Rdx+\varphi(y-m'x)+f(y-m''x)$, la cui differenziale restituisce in fatti la data. Così presso a poco si integreranno l'equazioni omogenee degli altri ordini.

990. Al caso di $m'=m''=\frac{1}{2}b$ soddisfà anche più direttamente il metodo stesso (988); poichè avendosi allora $c=\frac{b^2}{4}$, la proposta equazione (989) diventa $\frac{d^{2x}z}{dx}+\frac{bd^x d^y z}{dxdy}+\frac{b^2 d^{2y}z}{4dy^2}=R$, i cui coefficienti costanti formano un quadrato perfetto. Si ponga dunque $\frac{d^x z}{dx}+\frac{bd^y z}{2dy}=V$: differenziando per x e per y, moltiplicando respettivamente le due differenziali per $\frac{1}{dx}$, $\frac{b}{2dy}$ e sostituendo al solito, si troverà $\frac{d^x V}{dx}+\frac{bd^y V}{2dy}=R$ da cui si ottiene (984) $V=\int^x Rdx+\varphi(y-\frac{bx}{2})$; dunque l'integrale della data sarà $\frac{d^x z}{dx}+\frac{bd^y z}{2dy}=\int^x Rdx+\varphi(y-\frac{1}{2}bx)$, dalla cui integrazione viene $z=\int dx\int^x Rdx+x\varphi(2y-bx)+f(2y-bx)$.

991. La natura del nostro Libro non ci permette di estenderci più oltre sull'equazioni a differenze parziali. Solo aggiungeremo che questa teoria si applica sempre utilmente, e spesso per necessità, a tutti i problemi geometrici ove si considerano le superficie curve. Si voglia, per esempio, l'equazion generale di tutte le superficie di rivoluzione

luzione intorno all' asse AA, e si supponga $dz = d^x z + d^y z = Pdx + Qdy$ (980) la differenziale di questa equazione. Fatta HF $= z$, FP $= y$, PC $= x$, PM $= u =$ PH, si ha (730) $u^2 = z^2 + y^2$, o differenziando, $dz = \frac{udu}{z} - \frac{ydy}{z} = Pdx + Qdy$; e poichè Qdy deve eguagliarsi a $-\frac{ydy}{z}$ (936), sarà $Pdx = \frac{udu}{z}$; dunque u è funzione di x e può farsi $u = nx$. Si avrà pertanto $Q = \frac{-y}{z}$, $P = \frac{n^2x}{z}$, $\frac{P}{n^2x} + \frac{Q}{y} = 0 = \frac{d^x z}{dx} + \ldots \frac{n^2xd^y z}{ydy}$, ed integrando (984) con prendere il fattore $m = 2y$, verrà $z = \varphi(y^2 - n^2x^2)$, equazione cercata.

992. Poichè però non possono aver quì luogo le notizie occorrenti per dedurre da questa generale equazione l' equazioni particolari di superficie determinate, rammenteremo per ora al nostro intento, che se nell' equazione $u^2 = z^2 + y^2$ si sostituisca il valor di u cavato dall' equazion della curva genitrice AEAE, si avrà subito l' equazione alla superficie generata (730): così se AEAE sia un' ellisse, avremo $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ e l' equazione alla superficie dell' ellissoide sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}$. Ma se la semiellisse AEA cresca o scemi uniformemente nel primo quarto di rivoluzione, e all' incontro scemi o cresca del pari nel secondo ec., cosicchè la superficie generata abbia il semiasse CK $= c$ oltre i due AC $= a$, CE $= b$. è ben vero che non sarà più PM $=$ PH perchè la sezione MLP normale al piano AEAE, non sarà più un circolo ma un' ellisse: per altro essendo MLP simile alla sezione EKC segata pur normalmente per ECE, avremo EC (b) : CK (c) :: MP (u) : PL $= \frac{cu}{b}$; onde HF$^2 = z^2 = \frac{c^2u^2}{b^2u^2}(u^2 - y^2)$; riducendo dunque e sostituendo il valor di $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, l' equazione a questa superficie sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

196. 993. Abbiasi dunque un' infinità di tali superficie ellittico-sferoidali AEAKL simili tra loro e concentriche, e si cerchi l' equazione di quella che tutte le tagli ad angoli retti. Poichè per una delle date superficie abbiamo $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (992) e tutte son simili, supposta $a:b:c::r:s:1$ la ragione costante dei loro semiassi, e però $a = rc$, $b = sc$, la generale equazione di tutte diverrà $1 = \ldots\ldots \frac{x^2}{r^2c^2} + \frac{y^2}{s^2c^2} + \frac{z^2}{c^2}$, ove r, s saran costanti in ciascuna sferoide e il solo c varierà dall' una all' altra: perciò differenziando, la comune equazione delle superficie da tagliarsi sarà $dz = -\frac{xdx}{r^2z} - \frac{ydy}{s^2z} = X'dx + Y'dy$ fatto $X' = -\frac{x}{r^2z}$, $Y' = -\frac{y}{s^2z}$. Ora se ad un punto qualunque R della superficie AEAKL si alzi la normale $RT = f$ che incontri il piano AEA nel punto T a cui rispondono (condotta OST parallela a CA) le coordinate $CI = OT = a'$, $IT = GS = b'$, e da R si conduca sul piano AEA la perpendicolare $RV = z$, da V sopra CA la perpendicolare $VG = y$, e congiunta RS, pongasi $CG = OS = x$, sarà $TS = IG = a' - x$, $VS = b' - y$, e il triangolo RVS rettangolo in V darà $RS^2 = z^2 + (b' - y)^2$: ma appartenendo RS al piano RVS perpendicolare ad OT, anche il triangolo RST è rettangolo in S; dunque $RT = f = \sqrt{[z^2 + (b' - y)^2 + (a' - x)^2]}$, che per la natura delle normali alle superficie dovrà esser la massima o la minima di tutte le linee che da T posson condursi alla superficie AEAKL. Differenziando pertanto, verrà $zdz - (b' - y) dy - (a' - x) dx = 0$ (878), o sostituendo il valor di dz trovato di sopra, $(X'z - (a' - x)) dx + (Y'z - (b' - y)) dy = 0$, e quindi (880) $X'z - a' + x = 0$, $Y'z - b' + y = 0$, $a' = X'z + x$, $b' = Y'z + y$ ed $f = z\sqrt{(1 + X'^2 + Y'^2)}$. Ma giacchè nei punti ove le superficie si tagliano, le coordinate della cercata e della data debbono esser le stesse, supposta $dz = d^x z + d^y z = P'dx + Q'dy$ l' equazion differenziale della cercata, $k = RZ$ la sua normale in R, $g = CY$ ed $h = YZ$ le coordinate che determinano il punto Z in cui ella incontra il piano AEA, si troverà col raziocinio medesimo $g = P'z + x$, $h = Q'z + y$ e $k = z\sqrt{(1 + P'^2 + Q'^2)}$, onde se sia $TZ = t$ l' intervallo tra le due normali f, k, si avrà $t = \sqrt{(ZX^2 + XT^2)} = \sqrt{[(a' - g)^2 + (b' - h)^2]} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$. Or le due superficie debbon tagliarsi

FIG. 196.

ad angoli retti e però è retto l' angolo ZRT; dunque $t = \sqrt{(f^2 + k^2)} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$, cioè $1 + P'X' + Q'Y' = 0$, o mettendo i valori di X', Y', P', Q' dati di sopra $\frac{d^x z}{dx} + \frac{r^2 y d^y z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$ e però (987) $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$, equazione cercata, che diviene $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se le date sferoidi si cangino in sfere, ove essendo i semiassi $a = b = c$, si ha $r^2 = s^2 = 1 = m = n$.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

994. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi* di cui già parlammo di sopra (877), un altro ve ne è più elevato che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il punto di una data linea ove una certa quantità variabile diventa massima o minima, cosicchè cangiandosi gli altri punti o elementi della curva, la quantità massima o minima non soffre alcun cangiamento; in questo si vuole la linea stessa in cui abbia luogo la proprietà del massimo o del minimo, di modo che la quantità massima o minima dipende da tutta la curva, e cangiatone qualunque elemento essa pure si cangia. Così il problema di determinar nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l' isoperimetre la curva che con l' ordinata e con l' ascissa racchiude la massima area (528. II°. III°.), appartiene al secondo. E' vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo, ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

995. Sia BD una curva che abbia per asse la retta $AE = a$, e fatta l' ascissa $AP = x$, si conducano l' ordinate perpendicolari AB, PM, ED Pongo $PM = z$ intendendo per z una quantità composta comunque di x, di y, di $p = \frac{dy}{dx}$, di $q = \frac{dp}{dx}$, di $r = \frac{dq}{dx}$ ec. e anche degli integrali $\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., supposte φ, φ' ec. delle nuove funzioni di x, y, p, q ec. Se si prenda $PT = dx$ e si conduca l'ordinata TV,

FIG. 203.

203. sarà $PMVT = zdx$ (946), $ABMP = \int zdx$ che va a zero se $x = o$, e diviene ABDE se $x = a$. Chiamisi H l'area ABDE; dunque se ciascuna ordinata $PM = z$ *varj* in più o in meno di una quantità infinitesima Mf e sia β la *caratteristica della variazione* come d lo è della differenziazione, avremo $Mf = \beta z$ *variazione* di z, $MfiV = \beta z dx$ *variazione* di $zdx = PMVT$, $BcfM = \int \beta z dx$ somma degli elementi $MfiV$ e *variazione* dell' area ABMP, e finalmente $BCKD = \beta H$ *variazione* dell' area $ABDE = H$. Quindi se quest' area H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area BckD si annulli e sarà $\beta H = \beta . ABDE = \beta \int zdx = o$ (878), presa l'integrale da $x = o$ fino ad $x = a$. Da questa formula $\beta \int zdx = o$ si avrà la relazione tra x ed y o l'equazione alla curva che ha la proprietà cercata del massimo o del minimo: cosicchè qualunque altra equazione tra x ed y darà un valor più piccolo per H quando H è un massimo, o un valor più grande quando H è un minimo.

996. Il Calcolo delle Variazioni dee dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di βH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo. Or H può riguardarsi o nello *stato primitivo* quando z o PM non ha ricevuta in H alcuna variazione, o nello *stato variato* quando z vi ha avuta una variazione Mf, e si è cangiata in $PM \pm Mf = z \pm \beta z$. Ma siccome nello stato primitivo di H se x divenga $x \pm dx$ anche y diviene $y \pm dy$ (822); così nello stato variato mentre H passa in $H \pm \beta H$ ed x ($= AP$) resta lo stesso in ambedue gli stati, z ed y diventano $z \pm \beta z, y \pm \beta y$: onde x ordinariamente non influisce nella variazione βH, che solo dipende dalla variazione βz, e si ha $\beta x = o$, e perciò anche $\beta dx = o$: pur varierà anche x in certi casi, di cui non parleremo per ora.

997. Come z diventa $z + \beta z$, così z' ($= QN$) si cangia in $z' + \beta z' = Qg$, z'' ($= RS$) in $z'' + \beta z'' = Rh$ ec.: ma $z' = z + dz$ (822) onde $\beta z' = \beta z + \beta dz$; dunque $\beta dz = \beta z' - \beta z = d\beta z$ (822), cioè *la variazione d' una differenziale eguaglia la differenziale della sua variazione*. Perciò scrivendo dz in vece di z, sarà $\beta d^2 z = d\beta dz = d^2 \beta z$, e di nuovo scrivendo quì dz in luogo di z, verrà $\beta d^3 z = d\beta d^2 z = d^2 \beta dz = d^3 \beta z$; e in generale $\beta d^n z = d^n \beta z$, o preso $m < n$, $\beta d^n z = d^m \beta d^{n-m} z$.

998. Del pari supposto $u = \int zdx$ sarà variando, $\beta u =$

FIG. 203.

$\beta\int zdx$, e differenziando, $du = zdx$; dunque βdu ($= d\beta u$) $= \beta zdx$, e integrando, $\beta u = \int \beta zdx = \beta \int zdx$, cioè *la variazione dell' integrale* $\int zdx$ *eguaglia l' integrale della variazione di* zdx. Perciò scrivendo $\int z$ in vece di z, avremo $\int \beta \int zdx = \beta \iint zdx = \iint \beta zdx$ ec.

999. Si raccoglie da tutto ciò 1°. che la differenziale dz è diversissima dalla variazione βz; poichè dz è l' aumento che riceve z quando l' ordinata passa ad un altro punto della stessa curva, laddove βz è l' aumento di z quando l' ordinata passa ad un altro punto d' un' altra curva: 2°. che ciascun valore di y nel suo passaggio allo stato variato essendo bensì infinitesimo (995) ma indipendente da ogni legge o condizione (altrimenti la curva CK non rappresenterebbe tutte quelle in cui può variarsi BD, ma sarebbe determinata) le variazioni βy non hanno alcun rapporto coi valori stessi di y, e sono anzi tanto arbitrarie e indefinite che posson poi determinarsi a piacere e anche mandarsi tutte a zero, fuorchè quella o quelle che corrispondono alla linea infinitesima PT $= dx$ dalla quale risulta la formula $\int zdx$: 3°. che z cangiandosi in $z \pm dz$ nella differenziazione, ed in $z \pm \beta z$ nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di* z *come se ne ha la differenza* purchè in luogo di dz, dy si scriva $\beta z, \beta y$ e si faccia x costante: così la variazione di $z = ax^2y + bxy^2$ sarà $\beta z = ax^2\beta y + 2bxy\beta y$ ec.

1000. Dunque $\beta(zdx) = dx\beta z + z\beta dx$: ma $\beta dx = 0$ (996); dunque $\beta(zdx) = dx\beta z$ e $\int \beta(zdx) = \int dx\beta z = \beta\int(zdx)$ (998).

1001. Parimente poichè $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}$ ec. (995), presa dx costante, si avrà $dp = \frac{d^2y}{dx}, dq = \frac{d^2p}{dx} = \frac{d^3y}{dx^2}$, $dr = \frac{d^2q}{dx} = \frac{d^4y}{dx^3}$ ec. ed integrando, $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{d^2y}{dx^2}, r = \frac{d^3y}{dx^3}$ ec., dunque $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$ (996) $= \frac{d\beta y}{dx}$ (997), $\beta q = \frac{\beta d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\beta y}{dx^2}$, $\beta r = \frac{\beta d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\beta y}{dx^3}$ ec., differenziali che facilmente si deter-

203. minano osservando che $d\beta y = \beta y' - \beta y$, $d\beta y' = \beta y'' - \beta y'$, $d\beta y'' = \beta y''' - \beta y''$ ec. (997), e perciò $d^2\beta y = d\beta y' - d\beta y = \beta y'' - \beta y' - \beta y' + \beta y = \beta y'' - 2\beta y' + \beta y$, $d^3\beta y = d\beta y'' - 2d\beta y' + d\beta y = \beta y''' - \beta y'' - 2\beta y'' + 2\beta y' + \beta y' - \beta y = \beta y''' - 3\beta y'' + 3\beta y' - \beta y$ ec.: e se le variazioni di y', y'', y''' ec. sieno zero (999), verrà $d\beta y = -\beta y$, $d^2\beta y = \beta y$, $d^3\beta y = -\beta y$ ec.

1002. Volendo pertanto la variazione di z funzione di x, y, p, q, r ec. (995), siccome la sua differenza sarebbe $dz = Pdx + Qdy + Rdp + Sdq$ ec. supposte P, Q, R, S ec. funzioni di x, y, p, q ec.; così la sua variazione, fatto $\beta x = 0$ (996), sarà $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1001).

1003. Similmente per aver la variazione di $\int z dx$, essendo sempre z una funzione di x, y, p, q ec. si farà dx costante e avremo 1°. $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1002): 2°. $\beta(zdx) = dx\beta z$ (1000) $= Qdx\beta y + Rd\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec: 3°. $\int \beta z dx = \beta \int z dx$ (998) $= \int Qdx\beta y + \int Rd\beta y + \int \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: ma $\int Rd\beta y = R\beta y - \int dR\beta y$ (916) $= R\beta y - \int \frac{dx dR \beta y}{dx}$, e parimente $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \int \frac{dSd\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \ldots \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2Sdx\beta y}{dx^2}$ ec.; dunque $\beta \int z dx = \int dx\beta y \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec.} \right) + \beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec} \right) + \frac{d\beta y}{dx}(S - \text{ec.}) +$ ec. Fermiamoci a considerar questa formula.

1004. Osservo primieramente che ella è composta di una parte integrale $\int dx\beta y \left(Q - \frac{dR}{dx} \text{ ec.} \right)$, e di una parte assoluta $\beta y (R - \text{ec.}) + d\beta y (S - \text{ec.}) +$ ec. Or nel caso del massimo o del minimo per aver tutta la variazione βH bisogna porre $x = a$ nell' intera formula (995), ciò che di fatto eseguito nella sua parte assoluta, βy vi indicherà la variazione dell' ultima ordinata LD corrispondente all' ascis-

βx AE $= a$: ma tal variazione essendo arbitraria si può supporre zero (999): dunque nel caso di $x = a$ tutta la parte assoluta i cui termini son moltiplicati per $\beta y = 0$, per $d\beta y = 0$ ec., si annichilerà e avremo la sola parte integrale $\int d \cdot \beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = \beta H = 0$ (995).

1005. In secondo luogo osservo che quest'ultima espressione è la somma di tutte le variazioni che nascono dalla variazione di ciascun valore di y: ma tutte posson mandarsi a zero fuorchè una (999); dunque la somma di esse si ridurrà a quella sola, e si avrà $dx\beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = 0$, ovvero $Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.} = 0$. Dal che si raccoglie 1°. che se z è solamente funzione di x, y, nella formula di sopra $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec (1003) sarà $p = 0, q = 0, r = 0$ ec. onde $R\beta p = 0, S\beta q = 0$ ec., e l'equazione ora trovata diverrà $Q = 0$: 2°. che se z sia funzione di x, y, p, nella formula stessa (1003) sarà $q = 0, r = 0$ ec. onde $S\beta q = 0$ ec., e la nostra equazione diverrà $Q - \frac{dR}{dx} = 0$: e così di seguito.

1006. Ma riguardo a questa seconda conseguenza conviene riflettere che l'equazioni $Q - \frac{dR}{dx} = 0$, $Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} = 0$ ec. son sempre differenziali o del primo o di altri ordini più elevati: onde la loro integrazione esigendo l'aggiunta di una o più costanti arbitrarie, l'equazione tra x ed y che somministra il massimo o il minimo, non sarà interamente determinata, e si avranno tanti massimi o minimi quanti sono i valori che posson darsi a ciascuna costante. Si fissa dunque in tali casi il vero massimo o minimo colla parte assoluta $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) + d\beta y (S - \text{ec.}) + \text{ec.} = 0$ (1004) che attesa la variazione arbitraria βy (999), non può generalmente andare a zero se non vi vada ciascun suo termine, e sia perciò $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) = 0$, $d\beta y (S - \text{ec.}) = 0$ ec., ovvero $R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.} = 0$, $S - \text{ec.} = 0$ ec., sempre nella supposizione di $x = a$ (1004): ciò

determina le costanti e quindi il massimo o minimo, come vedremo.

1007. Troviamo ora la variazione di $\int zdx$ quando z contiene non solo x, y, p, q ec. ma anche un' integrale $\int\varphi dx$ (995). Sia $\int\varphi dx = \tau$ e avremo I. $\beta\tau = \beta\int\varphi dx = \int Q'dx\beta y + \int R'd\beta y + \int\frac{S'd^2\beta y}{dx}$ ec. (1003): di più essendo z funzione di τ, x, y, p, q ec., supposta V una funzione come z, verrà II. $\beta z = V\beta\tau + Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec., che sostituendo il valor della I., diviene $\beta z = V\int Q'dx\beta y + V\int R'd\beta y + V\int\frac{S'd^2\beta y}{dx}$ ec. $+ Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. Ora $\int\beta zdx = \beta\int zdx$ (998); dunque $\beta\int zdx = \int(Vdx\int Q'dx\beta y) + \int(Vdx\int R'd\beta y) + \int(Vdx\int\frac{S'd^2\beta y}{dx})$ ec. $+ \int Qdx\beta y + \int Rd\beta y + \int\frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec. Per liberar la formula dal segno integrale moltiplicato, pongo $Vdx = dK$ onde $\int(Vdx\int Q'dx\beta y) = \int(dK\int Q'dx\beta y) = K\int Q'dx\beta y - \int KQ'dx\beta y$, $\int(Vdx\int R'd\beta y) = \int(dK\int R'd\beta y) = K\int R'd\beta y - \int KR'd\beta y$, $\int(Vdx\int\frac{Sd^2\beta y}{dx}) = \int(dK\int\frac{S'd^2\beta y}{dx}) = K\int\frac{S'd^2\beta y}{dx} - \int\frac{KS'd^2\beta y}{dx}$ ec.; dunque $\beta\int zdx = K\int dx\,(Q'\beta y + \frac{R'd\beta y}{dx} + \frac{S'd^2\beta y}{dx^2}$ ec.$) + \int dx\,[(Q - KQ')\beta y + (R - KR')\frac{d\beta y}{dx} + (S - KS')\frac{d^2\beta y}{dx^2}$ ec.$]$, ove posson farsi le riduzioni di sopra (1003).

1008. Quasi nel modo stesso potrebbe aversi la variazione di $\int zdx$ quando z contiene più integrali $\int\varphi dx$, $\int\varphi'dx$ ec., e generalmente quando è data da un' equazion differenziale di qualunque ordine; potrebbe anche indagarsi la variazione di $\int zdx$ o di $\int z$ quando x non fosse costante come lo abbiamo supposto di sopra, e fino introdursi in questo Calcolo le differenze parziali che ne formano un

nuovo

nuovo ramo: ma tali ricerche ci devierebbero dalla presente nostra intenzione di terminar questo Libro con alcune più semplici e più elementari applicazioni dell' esposta dottrina.

1009. Probl. I. Tra tutte le curve riferite ad una stessa ascissa determinar quella in cui $\int z dx = \int (gx - y^2) y dx$ è un massimo o un minimo. Si avrà $z dx = (gx - y^2) y dx$, $z = (gx - y^2) y$ e $\beta z = (gx - 3y^2) \beta y$ (999) $= Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (1003); dunque $Q = gx - 3y^2$, $R = 0$, $S = 0$ ec.: ma dee esser $Q = 0$ (1005. 1°.); dunque $gx - 3y^2 = 0$ ovvero $y^2 = \frac{1}{3} gx$, equazione alla parabola. Sostituito il valor di $y = \sqrt{\frac{1}{3} gx}$ nella formula $\int (gx - y^2) y dx$, ella diviene $2\int (\frac{1}{3} gx)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15} gx^2 \sqrt{\frac{1}{3} gx}$ che si annulla quando $x = 0$, ed è un massimo o un minimo quando $x = a$. Per distinguere qual dei due abbia quì luogo, prendo in vece della parabola un' altra linea qualunque (995), per esempio la linea retta coincidente con l' asse onde sia $y = 0$, e trovo che $y = 0$ riduce la data formula a zero mentre $y = \sqrt{\frac{1}{3} gx}$ la riduceva a $\frac{4}{15} gx^2 \sqrt{\frac{1}{3} gx} > 0$; dunque si ha quì un massimo.

II. Trovar la curva in cui $\int z dx = \int (15g^2x^2 - 15g^3x + 5g^2y^2 - 3y^4) y dx$ è un massimo o un minimo. Dunque $\beta z = (g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4)\, 15\beta y = Q\beta y$, e $Q = 0 = g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4 =$ (195) $(y^2 - g^2 + gx)(gx - y^2)$, e perciò soddisfanno al quesito due parabole dell' equazioni I. $y^2 = g(g - x)$, II. $y^2 = gx$. Per sapere quale delle due dia il massimo, supporrò x infinitesima, il che riduce la I. ad $y = g$ (197), valore che posto nella formula data, la cangia in $\int 2g^5 dx$ (197), mentre sostituendovi $y = \sqrt{gx}$ preso dalla II., si ha $\int -10g^3 x dx \sqrt{gx}$ (197); ma fatto, come sopra, $y = 0$, la formula va a zero e $\int 2g^5 dx > 0$, laddove $\int -10g^3 x dx \times \sqrt{gx} < 0$; dunque la I. dà un massimo, la II. un minimo.

III. Qual è la curva in cui $\int z dx = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo? Poichè $\frac{dy}{dx} = p$, verrà $\sqrt{(dx^2 +}$

$dy^2) = dx\sqrt{(1+p^2)}$, onde $z = \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$, $dz\,(= Pdx + Qdy + Rdp) = \frac{pdp}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{dy\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$ e $\beta z = \frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{\beta y\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}} = Q\beta y + R\beta p$; dunque $P = o$, $Q = \frac{-\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$, $R = \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$; e poichè dee quì aversi $Q - \frac{dR}{dx} = o$ (1005.2°.), sarà $Qpdx\,(= Qdy) = pdR$: ma essendo $P = o$, viene $dz = Qdy + Rdp = pdR + Rdp$; dunque integrando, z ($= \ldots \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$) $= pR + C = \frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}} + C$, e $C = \frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$. Pertanto se si faccia costante $y(1+p^2) = m$, sarà $C = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $p\,(= \frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e $dy = dx\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, equazione ad una cicloide (873) il cui circolo genitore ha per diametro m. La riduco a $dx = dy\sqrt{\frac{y}{m-y}} = \frac{ydy}{\sqrt{(my-y^2)}} = \ldots\ldots$

$$\frac{mdy}{2\sqrt{(my-y^2)}} - \frac{\left(\frac{m}{2}-y\right)dy}{\sqrt{(my-y^2)}},$$

ed integrandola per un circolo del raggio $\frac{m}{2}$, ottengo $x = arc.\ sen\,v.\,y$ (850) $- \sqrt{(my - y^2)} + C$ (857), con che abbiamo le due costanti arbitrarie m, C. Per determinarle faccio $R - \frac{dS}{dx} = o$ (1006), cioè $R\,(= \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}) = o$ perchè quì $S = o$, e viene $p = o = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$ e perciò $y = m$: quindi l' equazione integrata, postovi $y = m$ ed $x = a$ (1006), diverrà $a = arc.\ sen\,v.\,m + C$: ma essendo m il diametro, $arc.\ sen\,v.\ m$ è evidentemente la semicirconferenza $m\pi$; dunque $C = a - m\pi$; di più se quando $x = o$ si vuole anche $y = o$, l'equazione integrata si cangierà in $o = a - m\pi$ e sarà $m = \frac{a}{\pi}$. Del resto, si ha quì un minimo; poichè la data formula, sostituito il valor di $p = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$, diventa $\int dx\sqrt{\frac{m}{y}}$, da cui, facendo al solito $y = o$, viene un infinitamente grande.

IV. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella in

cui l' area $\int ydx$ (946) è un massimo o un minimo. Giacchè l' espressione della lunghezza d' un arco è (949) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (III.) e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\beta\int dx\sqrt{(1+p^2)}=0$: ma anche $\beta\int ydx=0$ (995); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui $\int zdx=\int ydx+\int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ è un massimo o un minimo, moltiplicata per g costante l' espression dell' arco, onde sieno omogenee le due integrali. Si avrà pertanto $z=y+g\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y+\frac{gp\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=1$, $R=\frac{gp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà $z\,(=y+g\sqrt{(1+p^2)})=pR+C=\frac{gp^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $(C-y)\sqrt{(1+p^2)}=g$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}{C-y}$, e $dx=\ldots\ldots\frac{dy\,(C-y)}{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}$; dunque integrando, $x=\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}+C'$, cioè $(C-y)^2=g^2-(x-C')^2$ equazione al circolo, in cui le costanti g, C, C' si determineranno come sopra (III) avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporsi data: ed è chiaro che il radicale portando il doppio segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all' ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

V. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (956). Trascurato 2π che è un numero costante, e fatta $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, dovrà essere, come nell' antecedente problema, $\int zdx=\int ydx\sqrt{(1+p^2)}+\int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ un massimo o un minimo; dunque $z=(y+g)\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y\sqrt{(1+p^2)}+\ldots\ldots\frac{(y+g)p\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=\sqrt{(1+p^2)}$, $R=\frac{(y+g)p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\ldots\frac{dR}{dx}=0$, e fatto il solito raziocinio, $z\,(=(y+g)\sqrt{(1+p^2)})=pR+C=\frac{(y+g)p^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $C=\frac{y+g}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=$

$\frac{1}{C}\surd[(y+g)^2 - C^2]$, e $dx = \frac{Cdy}{\surd[(y+g)^2 - C^2]}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria* perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E qui pure atteso il doppio segno che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all' asse, ed un minimo quando gli volga la convessità.

1010. Porremo fine con dei Problemi.

I. Elevare un polinomio a qualunque potenza m, ovvero supposto $(f + gx + hx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{ec})^m = F + Gx + Hx^2 + Kx^3 + Lx^4 + \text{ec.}$, determinare i coefficienti F, G, H, K, L ec. *Ris.* $F = f^m$, $G = \frac{mgF}{f}$, $H = \frac{2mhF + (m-1)gG}{2f}$,

$$K = \frac{3mkF + (2m-1)hG + (m-2)gH}{3f}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L = \frac{4mlF + (3m-1)kG + (2m-2)hH + (m-3)gK}{4f} \text{ ec.},$$

ove la legge è manifestissima.

II. Data una Curva di nota tangente e presa in ogni sua ordinata una media proporzionale tra l' ordinata stessa e la corrispondente ascissa, condurre la tangente alla nuova Curva che passa per l' estremità delle medie proporzionali. *Ris.* Se x, y sieno le coordinate della curva data e z l' ordinata della nuova curva, la sua suttangente sarà $\frac{2z^2 dx}{xdy + ydx}$, che essendo la data curva una parabola o un circolo del raggio a, diviene $\frac{4x}{3}$ o $\frac{4ax - 2x^2}{3a - 2x}$.

III. Trovare il punto di flesso contrario nella curva dell' equazione $y = \frac{ax}{\surd(rx - x^2)}$. *Ris.* Il punto cercato corrisponde all' ordinata che ha per ascissa $x = \frac{1}{4}r$.

IV. Qual è la linea retta che con due date forma il triangolo massimo? *Ris.* L' ipotenusa; cioè il triangolo massimo è il rettangolo.

V. Qual è il massimo dei triangoli iscrittibili in un dato circolo e sopra una corda data? *Ris.* L' isoscele.

VI. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz che abbia il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = z = \sqrt{ab}$.

VII. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz, tre de' cui lati abbiano il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, $z = \sqrt{2ab}$.

VIII. Qual è il minimo dei quadrati iscrittibili in un dato quadrato? *Ris.* Se a sia il lato del dato, quello del minimo si troverà $\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$.

IX. Qual è il massimo in superficie convessa o in solidità di tutti i cilindri iscrittibili in una data sfera o in un dato cono? *Ris.* Se $2r$ sia il diametro della sfera o della base del cono, quello della base del cilindro massimo in superficie sarà $r\sqrt{2}$, in solidità sarà $\frac{4}{3}r$.

X. Qual deve essere il rapporto tra il diametro della base e l' altezza d' una Misura cilindrica di data capacità affinchè la sua superficie interiore sia un minimo? *Ris.* Il rapporto dee essere di $2:1$, come si trovò sopra (VI).

XI. Determinare il valor dei rotti 1°. $\frac{b(a-x)^2}{(a-x)^2}$ quando $x = a$; 2°. $\frac{1 - sen\,x + cos\,x}{sen\,x + cos\,x - 1}$ quando $x = 90°$; 3°. $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ quando $x = 1$. *Ris.* I valori cercati si troveranno $b, 1, -2$.

XII. Integrare $\frac{zdz}{z^3 - c^3}$. *Ris.* $\int \frac{zdz}{z^3 - c^3} = \frac{l(z-c)}{3c} - \ldots$
$\frac{l(c^2 + cz + z^2)}{6c} + \frac{1}{c\sqrt{3}} \times arc.tang \frac{2z + c}{c\sqrt{3}} + C.$

XIII. Integrare $yxdx$ posto $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$. *Ris.*

$\int yxdx = a\int ydx - \frac{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}{3}$.

XIV. Integrare $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$. *Ris.* $\int \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}} = \sqrt{(ax - x^2)} + arc. sen\, v\, x$ in un circolo del raggio $\frac{1}{2}a$.

XV. integrar $\frac{d\varphi}{(1 - b\cos\varphi)^2}$ supposto $b < 1$. *Ris.* . . . . .
$\int \frac{d\varphi}{(1 - b\cos\varphi)^2} = \frac{b\, sen\,\varphi}{(1 - b^2)(1 - b\cos\varphi)} + \frac{2}{(1 - b^2)^{\frac{3}{2}}} arc. tang \frac{(1 + b)\, sen\,\varphi}{(1 + \cos\varphi)\sqrt{(1 - b^2)}} + C$.

XVI. Integrar le formule $x^n dx\, sen\, x$, $x^n dx \cos x$. *Ris.* 1°. $\int x^n dx\, sen\, x = -x^n \cos x + nx^{n-1} sen\, x + n(n-1)x^{n-2} \times \cos x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} sen\, x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \times \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.; 2°. $\int x^n dx \cos x = x^n sen\, x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)x^{n-2} sen\, x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} \times \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.: preso alternativamente in ambedue i casi $sen\, x$ e $\cos x$ fino al termine ove si trova x^{n-n} col quale è compita l' integrazione.

XVII. Quadrar la curva dell' equazione $y^m = a + x$.
Ris. $\int ydx = \frac{m[(a+x)^{\frac{m+1}{m}} - a^{\frac{m+1}{m}}]}{m+1}$.

XVIII. Costruito un circolo sull' asse trasverso a d' un' ellisse il cui conjugato sia b, trovar 1°. la ragione delle loro aree o dei loro settori corrispondenti: 2°. l' area ellittica. *Ris.* 1°. la ragione è di $a:b$; 2°. l' area è $ab\pi$.

XIX. Supposta sull' asintoto d' un' iperbola una serie d' ascisse in progression geometrica, trovar la progressione dell' aree corrispondenti. *Ris.* La progressione è aritmetica.

XX. Trovar nell' iperbola due spazj asintotici in ragio-

ne di $p:q$. *Ris.* Supposta m^2 la potenza, e z, x due ascisse dal centro, si troverà $x = \sqrt[p]{z^q m^{p-q}}$.

XXI. Data un' iperbola della potenza 1, cerco l' angolo x degli asintoti tale che il modulo dei logaritmi tavolari 0,4342944819 sia $= sen\, x$. *Ris.* Valendosi della serie data al n°. 893, si troverà $x = 25° 44' 25'' 27'''$ ec.

XXII. Quadrare e rettificar la curva trascendente dell' equazione $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}$. *Ris.* Lo spazio asintotico ed infinitamente lungo compreso dalla curva e dal suo asintoto eguaglia il quadrante d' un circolo del raggio a: un suo arco qualunque eguaglia la corrispondente ascissa d' una logaritmica che cominci dal vertice della curva ed abbia a per suttangente.

XXIII. Rettificar la curva dell' equazione $dy = \ldots \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$. *Ris.* $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(2ax + x^2)}$.

XXIV. Misurar l' intero solido prodotto dalla rivoluzion della cissoide intorno al diametro del suo circolo genitore. *Ris.* Il solido è infinito.

XXV. Misurar la superficie del solido generato dalla rivoluzione intorno all' asintoto dello spazio asintotico ed infinitamente lungo del Probl. XIX. *Ris.* La superficie eguaglia il circolo del raggio $a\sqrt{2}$.

XXVI. Misurar la solidità e la superficie convessa dell' unghia cilindrica formata dal taglio obliquo d' un cilindro retto, in modo che la sezione passi per il centro della base. *Ris.* Se sia r il raggio della base del cilindro, a l' altezza dell' unghia, se ne troverà la solidità $= \frac{2}{3} ar^2$, e la superficie $= 2ar$.

XXVII. Trovar la curva la cui tangente è costante ed $= a$. *Ris.* L' equazione della curva cercata sarà $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

XXVIII. Trovar la curva la cui suttangente è . . . . .

$\frac{x^4}{2x^3 + ay^2 + y^2 x}$. *Ris.* L' equazione è $y^2 = \frac{x^4}{2C - 2ax - x^2}$.

XXIX. Trovar la curva la cui sunnormale è ...... $\frac{-y^4}{xy^2 + bx^3}$. *Ris.* L' equazione è $y^4 = C^4 (b + \frac{2y^2}{x^2})$.

XXX. Trovar la curva la cui area è $\frac{x^3}{3a}$. *Ris.* La curva è una parabola.

IL FINE.

TAVOLA
DEI NUMERI PRIMI
col più piccolo divisore dei numeri impari non primi
fino a 100000

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
•	•	•	3	•	•	•	•	3	•	3	•	•	3	•	3	•	•	•	7
•	•	•	•	3	•	3	7	11	3	•	3	•	7	•	•	3	11	3	•
3	7	3	11	•	3	7	3	13	•	•	•	3	•	3	•	•	3	13	3
7	3	•	3	•	•	•	11	3	17	3	7	•	3	•	3	11	7	•	•
•	13	11	•	3	7	3	•	•	3	7	3	•	•	19	•	3	•	3	•
3	•	3	•	7	3	11	3	•	•	17	23	3	3	3	7	•	3	•	3
•	3	•	3	13	•	•	•	3	7	3	17	•	3	7	3	•	•	•	11
•	19	7	•	3	23	3	•	7	3	•	3	17	•	11	•	3	•	3	7
3	11	3	•	•	3	19	3	•	•	•	•	3	7	3	•	29	3	7	3
17	3	•	3	•	11	7	•	3	13	3	•	7	3	•	3	•	23	•	13
7	17	19	•	3	•	3	•	•	3	13	3	•	•	17	•	3	7	3	•
3	•	3	•	11	3	•	3	19	•	7	•	3	11	3	17	7	3	31	3
•	3	17	3	7	•	•	23	3	•	3	•	•	3	•	3	17	11	29	•
•	•	•	7	3	13	3	•	•	3	•	3	11	31	7	13	3	17	3	19
3	23	3	•	17	3	13	3	7	•	•	•	3	•	3	•	11	3	•	3
19	3	11	3	•	17	37	7	3	•	3	11	•	3	29	3	23	•	7	•
•	7	•	•	3	•	3	•	•	3	•	3	7	23	•	11	3	31	3	17
3	13	3	•	29	3	17	3	•	•	11	7	3	•	3	37	•	3	•	3
•	3	13	3	•	7	23	17	3	•	3	31	•	3	11	3	7	19	•	43
•	11	•	23	3	•	3	19	17	3	41	3	•	•	13	7	3	29	3	•
3	•	3	7	•	3	•	3	43	7	•	•	3	19	3	•	13	3	23	3
11	3	7	3	•	•	29	13	3	11	3	•	•	3	•	3	•	•	19	7
31	•	•	47	3	•	3	7	•	3	17	3	23	7	•	•	3	•	3	13
3	7	3	•	•	3	7	3	11	23	13	17	3	•	3	•	•	3	•	3
7	3	29	3	•	19	•	41	3	•	3	7	11	3	•	3	•	7	•	31
41	•	23	13	3	7	3	11	•	3	7	3	•	17	43	•	3	•	3	•
3	19	3	•	7	3	•	3	•	43	37	11	3	•	3	7	19	3	•	3
37	3	•	3	•	•	11	•	3	7	3	•	•	3	7	3	•	13	41	•
•	•	7	53	3	29	3	•	7	3	11	3	19	•	•	17	3	•	3	7
3	•	3	•	41	3	•	3	23	37	•	29	3	7	3	•	17	3	7	3
•	3	31	3	•	23	7	•	3	•	3	13	7	3	•	3	•	17	11	•
7	29	13	•	3	11	3	•	•	3	53	3	31	13	•	43	3	7	3	47
3	•	3	•	13	3	•	3	•	11	7	•	3	53	3	41	7	3	17	3
•	3	•	3	7	•	31	•	3	•	3	•	•	3	47	3	13	•	•	17
19	41	•	7	3	•	3	13	11	3	23	3	47	•	7	19	3	11	3	•
3	31	3	11	•	3	•	3	7	13	•	•	3	•	3	•	•	3	•	3
13	3	•	3	23	•	•	7	3	•	3	19	•	3	•	3	11	•	7	41
•	7	11	•	3	47	3	•	61	3	•	3	7	•	37	•	3	19	3	23
3	•	3	13	37	3	11	3	•	•	43	7	3	•	3	11	23	3	•	3
47	3	•	3	•	7	•	•	3	•	3	•	•	3	31	3	7	•	•	11
•	•	•	19	3	•	3	•	•	3	•	3	29	37	11	7	3	13	3	•
3	11	3	7	•	3	23	3	13	7	•	•	3	•	3	•	41	3	11	3
•	3	7	3	•	11	•	•	3	41	3	•	•	3	19	3	•	•	31	7
11	13	59	31	3	19	3	7	29	3	•	3	61	7	•	•	3	43	3	•
3	7	3	•	11	3	7	3	•	•	19	43	3	11	3	23	•	3	•	3
7	3	•	3	17	•	•	•	3	•	3	7	23	3	13	3	19	7	•	•
43	•	17	11	3	7	3	31	•	3	7	3	11	41	•	•	3	•	3	•
3	•	3	17	7	3	53	3	•	•	29	•	3	•	3	7	11	3	47	3
•	3	11	3	17	•	•	61	3	7	3	11	•	3	7	3	47	29	37	13
13	•	7	•	3	17	3	•	7	3	13	3	•	•	•	11	3	•	3	7
3	•	3	•	•	3	29	3	•	•	11	47	3	7	3	•	71	3	7	3
•	3	•	3	19	•	7	•	3	47	3	23	7	3	11	3	53	37	•	19
7	11	41	•	3	13	3	17	23	3	•	3	•	•	•	13	3	7	3	29
3	•	3	•	47	3	13	3	17	•	7	73	3	•	3	19	7	3	•	3
11	3	•	3	7	•	•	•	3	11	3	61	•	3	•	3	•	•	13	•
•	•	•	7	3	37	3	•	•	3	•	3	•	11	7	29	3	23	3	31
3	13	3	71	31	3	41	3	7	•	17	13	3	43	3	•	•	3	•	3
•	3	13	3	•	29	•	7	3	59	3	17	11	3	•	3	•	•	7	•
•	7	•	37	3	•	3	11	•	3	•	3	7	19	13	•	3	•	3	•
3	•	3	19	23	3	61	3	31	•	•	7	3	17	3	•	13	3	19	3
17	3	•	3	•	7	11	13	3	19	3	•	37	3	•	3	7	•	•	23
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
0	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
1	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.
2	.	11	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	17	3	.	3	13
3	3	.	3	.	19	3	.	3	7	.	13	.	3	.	3	.	17	3	.	3
4	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	.	13	3	.	3	.	17	7	.
5	19	7	.	13	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	19	3	.	3	.
6	3	.	3	.	.	3	23	3	11	.	.	7	3	.	3	13	.	3	17	3
7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	19	11	3	.	3	7	13	.	17
8	23	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	29
9	3	.	3	7	31	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	23	.	3	.	3
10	.	3	7	3	.	.	11	.	3	29	3	13	23	3	.	3	.	.	.	7
11	.	.	13	19	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	29	3	.	3	11
12	3	7	3	.	13	3	7	3	31	19	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
13	7	3	23	3	.	29	.	37	3	.	3	7	.	3	19	3	13	7	11	.
14	.	.	3	.	3	7	3	13	.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	.
15	3	.	3	.	7	3	.	3	.	11	19	.	3	.	3	7	37	3	.	3
16	13	3	.	3	11	.	.	.	3	7	3	23	41	3	7	3	19	.	.	.
17	17	.	7	.	3	41	3	29	7	3	.	3	13	.	.	.	3	11	3	7
18	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.	31	3	7	3
19	.	3	19	3	37	13	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	.	.	.
20	7	.	11	29	3	.	3	.	19	3	31	3	.	.	.	.	3	7	3	.
21	3	.	3	17	.	3	11	3	13	41	7	.	3	3	3	11	7	3	13	3
22	.	3	37	3	7	31	.	.	3	.	3	43	.	3	.	3	29	.	.	11
23	.	13	.	7	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.
24	3	11	3	.	23	3	.	3	7	.	.	37	3	13	3	19	47	3	11	3
25	.	3	.	3	13	11	17	7	3	31	3	.	29	3	13	3	.	.	7	23
26	11	7	.	.	3	.	3	17	.	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.
27	3	.	3	31	11	3	.	3	17	47	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3
28	.	3	.	3	.	7	47	19	3	13	3	.	43	3	.	3	7	11	.	13
29	13	.	.	11	3	.	3	.	.	3	13	3	11	19	29	7	3	41	3	.
30	3	43	3	7	.	3	.	3	37	7	17	.	3	.	3	.	11	3	19	3
31	23	3	7	3	29	.	.	.	3	19	3	11	.	3	.	3	.	31	23	7
32	.	.	.	.	3	13	3	7	.	3	29	3	17	7	19	11	3	37	3	.
33	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	11	31	3	17	3	.	.	3	43	3
34	7	3	.	3	.	.	.	.	3	23	3	7	59	3	11	3	.	7	13	.
35	53	11	.	.	3	7	3	43	.	3	7	3	.	.	17	37	3	.	3	59
36	3	13	3	.	7	3	19	3	.	.	.	13	3	29	3	7	.	3	.	3
37	11	3	13	3	.	53	.	.	3	7	3	.	19	3	7	3	17	.	.	29
38	.	.	7	17	3	.	3	53	7	3	.	3	.	11	13	.	3	17	3	7
39	3	59	3	37	17	3	.	3	11	29	41	23	3	7	3	.	13	3	7	3
40	.	3	.	3	31	17	7	13	3	.	3	.	7	3	61	3	.	.	17	.
41	7	.	.	.	3	23	3	11	43	3	.	.	37	47	53	59	3	7	3	13
42	3	.	3	.	.	3	17	3	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
43	19	3	.	3	7	.	11	17	3	.	3	29	13	3	41	3	.	23	.	53
44	.	61	.	7	3	.	3	41	17	3	11	3	.	.	7	67	3	.	3	11
45	3	29	3	47	.	3	.	3	7	17	23	19	3	.	3	13	.	3	.	3
46	.	3	.	3	59	.	13	7	3	.	3	.	31	3	43	3	.	13	7	37
47	.	7	67	.	3	11	3	19	13	3	17	3	7	.	.	.	3	.	3	.
48	3	23	3	43	.	3	31	3	.	11	.	7	3	19	3	.	67	3	59	3
49	.	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	13	17	3	.	3	7	.	19	.
50	.	31	13	.	3	61	3	37	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.
51	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	31	.	3	71	3	.	29	3	.	3
52	59	3	7	3	.	19	23	11	3	.	3	.	.	3	17	3	11	67	.	7
53	.	53	11	23	3	31	3	7	41	3	19	3	.	7	.	17	3	.	3	.
54	3	7	3	53	43	3	7	3	.	13	.	.	3	.	3	11	17	3	23	3
55	7	3	.	3	67	.	19	.	3	.	3	7	.	3	37	3	.	7	29	11
56	.	.	.	.	3	7	3	.	53	3	7	3	13	.	11	.	3	.	3	41
57	3	11	3	13	7	3	73	3	29	23	53	.	3	.	3	7	.	3	11	3
58	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	43	71	.	17
59	11	.	7	59	3	67	3	47	7	3	43	3	.	31	.	53	3	13	3	7
60	3	.	3	73	11	3	.	3	1	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
.	17	31	41	3	.	3	29	.	3	11	3	.	.	17	7	3	.	3	11
3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	23	3	17	79	3	.	3
.	3	7	3	.	59	.	71	3	.	3	.	13	3	.	3	17	.	11	7
37	19	43	13	3	11	3	7	.	3	.	3	59	7	41	47	3	17	3	.
3	7	.	23	17	3	9	3	.	11	61	.	3	47	3	13	31	3	.	3
7	3	.	3	11	17	13	.	3	37	3	7	19	3	.	3	29	7	17	61
.	.	19	.	3	7	3	.	11	3	7	3	53	.	.	23	3	11	3	17
3	.	3	11	7	3	17	3	19	.	.	.	3	.	3	7	.	3	41	3
67	3	.	3	.	31	.	11	3	7	3	13	29	3	7	3	11	53	.	.
.	47	7	43	3	.	3	.	7	3	.	3	79	13	31	.	3	.	3	7
3	.	3	.	13	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	37	3	7	3
19	3	.	3	.	.	7	.	3	31	3	.	7	3	.	3	13	.	.	11
7	67	.	.	3	71	3	13	.	3	17	3	.	.	11	41	3	7	3	.
3	11	3	31	.	3	.	3	41	13	7	17	3	.	3	43	7	3	11	3
13	3	.	3	7	11	.	73	3	.	3	.	17	3	.	3	.	19	.	.
11	.	.	7	3	23	3	19	.	3	29	3	13	17	7	.	3	.	3	.
3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	.	59	3	11	3	71	.	3	61	3
29	3	37	3	73	13	.	7	3	.	3	.	41	3	17	3	.	11	7	47
.	7	.	11	3	41	3	.	89	3	.	3	7	.	.	17	3	13	3	.
3	53	3	.	.	3	.	3	13	71	23	7	3	29	3	.	11	3	13	3
.	3	11	3	.	7	.	23	3	.	3	11	47	3	79	3	7	17	.	29
59	13	29	.	3	43	3	.	.	3	19	3	.	.	.	7	3	.	3	73
3	19	3	7	.	3	.	3	53	7	11	.	3	13	3	31	19	3	17	3
31	3	7	3	13	47	19	.	3	.	3	.	.	3	11	3	23	.	.	7
.	11	47	67	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	83
3	7	3	.	79	3	7	3	37	.	.	.	3	89	3	53	.	3	.	3
7	3	.	3	31	.	23	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13
13	.	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.	3	37	3	.
3	29	3	59	7	3	37	3	11	.	79	.	3	.	3	7	.	3	23	3
.	3	.	3	.	.	71	29	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	83	.
19	.	7	.	3	13	3	11	7	3	.	3	23	.	.	13	3	41	3	7
3	.	3	.	61	3	13	3	.	23	.	11	3	7	3	.	.	3	7	3
71	3	41	3	.	67	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	.	13	.
7	.	23	97	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.	3	7	3	11
3	13	3	37	.	3	31	3	.	89	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3
.	3	13	3	7	.	59	.	3	.	3	.	.	3	23	3	31	.	11	.
89	31	17	7	3	11	3	.	.	3	71	3	37	.	7	.	3	.	3	.
3	.	3	17	.	3	.	3	7	11	31	.	3	.	3	.	13	3	43	3
.	3	.	3	11	23	47	7	3	.	3	.	.	3	19	3	.	61	7	.
73	7	.	.	3	17	3	43	11	3	37	3	7	79	.	.	3	11	3	13
3	.	3	11	.	3	67	3	29	53	13	7	3	.	3	.	.	3	73	3
101	3	59	3	.	7	17	11	3	.	3	53	13	3	29	3	7	.	.	37
.	.	11	13	3	.	3	17	.	3	23	3	.	.	.	7	3	.	3	79
3	101	3	7	29	3	11	3	17	7	.	.	3	.	3	11	53	3	31	3
.	3	7	3	23	.	13	67	3	17	3	.	.	3	41	3	83	13	53	7
.	23	.	103	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	11	.	3	29	3	23
3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	17	.	3	.	3	.	23	3	11	3
7	3	101	3	19	11	29	31	3	79	3	7	.	3	.	3	37	7	.	19
11	.	13	.	3	7	3	61	67	3	7	3	17	13	.	.	3	31	3	.
3	.	3	101	7	3	23	3	103	73	.	41	3	11	3	7	61	3	.	3
17	3	29	3	41	.	.	.	3	7	3	31	.	3	7	3	13	11	71	.
23	17	7	11	3	.	3	13	7	3	103	3	11	47	17	.	3	.	3	7
3	89	3	43	.	3	.	3	.	13	47	.	3	7	3	17	11	3	7	3
13	3	11	3	.	101	7	19	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	.	107
7	.	37	17	3	29	3	.	41	3	.	3	13	19	83	11	3	7	3	.
3	41	3	13	17	3	.	3	.	59	7	29	3	.	3	103	7	3	19	3
.	3	23	3	7	13	.	.	3	19	3	37	.	3	11	3	59	.	17	31
.	11	.	7	3	.	3	53	.	3	.	3	.	.	7	.	3	13	3	17
3	.	3	.	43	3	17	3	7	.	.	79	3	.	3	.	.	3	13	3
11	3	.	3	.	41	61	7	3	11	3	23	53	3	.	3	.	.	7	.
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
61	.	3	47	3	61	.	7	31	3	.	3	37	7	3	23	3	41	[illegible]	.	.
62	7	13	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	61	.	19	3	[illegible]	3	.
63	3	.	3	.	.	3	.	3	23	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3
64	.	3	11	3	7	23	29	.	3	.	3	11	.	3	13	3	.	43	73	67
65	.	.	79	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	29	7	11	3	19	3	.
66	3	.	3	.	.	3	59	3	7	.	11	.	3	41	3	.	.	3	37	3
67	43	3	29	3	.	.	67	7	3	13	3	.	.	3	11	3	.	.	7	13
68	13	7	.	19	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	71	83	3	61	3	.
69	3	17	3	.	.	3	.	3	.	19	.	7	3	.	3	29	.	3	.	3
70	11	3	.	3	23	7	37	.	3	11	3	.	73	3	19	3	7	41	47	31
71	.	23	17	.	3	13	3	67	71	3	.	3	43	11	.	7	3	.	3	23
72	3	.	3	7	53	3	13	3	11	7	19	29	3	.	3	37	23	3	.	3
73	.	3	7	3	17	37	53	.	3	73	3	47	11	3	83	3	19	.	13	7
74	.	29	.	.	3	17	3	7	31	3	.	3	.	7	.	.	3	59	3	.
75	3	7	3	.	.	3	7	3	67	.	.	11	3	.	3	.	.	3	71	3
76	7	3	13	3	47	79	11	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	43	.
77	23	.	.	.	3	7	3	17	19	3	7	3	31	43	13	.	3	.	3	11
78	3	.	3	29	7	3	.	3	17	.	.	.	3	.	3	7	13	3	53	3
79	.	3	73	3	19	.	31	13	3	7	3	79	23	3	7	3	61	.	11	19
80	83	.	7	.	3	11	3	.	7	3	41	3	.	59	.	.	3	.	3	7
81	3	31	3	41	.	3	.	3	.	11	13	.	3	7	3	19	.	3	7	3
82	37	3	23	3	11	.	7	.	3	.	3	17	7	3	.	3	.	.	.	43
83	7	.	61	13	3	.	3	.	11	3	.	3	17	83	.	.	3	7	3	37
84	3	79	3	11	.	3	.	3	43	37	7	61	3	17	3	13	7	3	29	3
85	17	3	43	3	7	.	13	11	3	.	3	23	.	3	31	3	11	13	.	.
86	41	17	11	7	3	.	3	.	13	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	11	3	7	31	67	.	3	.	3	11	59	3	19	3
88	53	3	17	3	.	.	.	7	3	19	3	13	83	3	.	3	17	.	7	17
89	.	7	13	17	3	.	3	.	.	3	47	3	7	13	11	89	3	17	3	.
90	3	11	3	.	13	3	.	3	47	43	29	7	3	31	3	61	.	3	11	3
91	.	3	.	3	.	7	89	53	3	.	3	67	.	3	.	3	7	29	17	.
92	11	19	.	47	3	59	3	13	73	3	.	3	.	.	37	7	3	.	3	17
93	3	47	3	7	11	3	17	3	.	7	.	83	3	11	3	41	.	3	.	3
94	13	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	.	19	3	53	3	.	11	.	7
95	.	41	19	11	3	73	3	7	17	3	61	3	11	7	.	43	3	53	3	29
96	3	7	3	13	.	3	7	3	19	17	.	.	3	23	3	.	11	3	.	3
97	7	3	11	3	43	13	.	.	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	97	41
98	.	59	.	.	3	7	3	71	.	3	7	3	41	.	.	11	3	13	3	19
99	3	37	3	23	7	3	.	3	13	.	11	17	3	67	3	7	97	3	13	3
100	19	3	89	3	.	29	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	23	.
101	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	[illegible]	.	17	61	23	3	.	3	7
02	3	.	3	.	31	3	.	3	.	.	43	19	3	7	3	.	41	3	7	3
03	11	3	.	3	13	43	7	.	3	11	3	97	7	3	13	3	.	19	37	.
04	7	.	.	.	3	.	3	19	37	3	.	3	47	11	.	17	3	7	3	.
05	3	61	3	.	59	3	.	3	11	97	7	71	3	19	3	.	7	3	.	3
106	.	3	.	3	7	.	.	47	3	43	3	59	11	3	.	3	.	17	19	43
07	13	.	31	7	3	47	3	11	.	3	13	3	.	41	7	.	3	43	3	.
08	3	.	3	.	.	3	.	3	7	83	73	11	3	.	3	.	.	3	17	3
09	47	3	.	3	97	19	11	7	3	.	3	.	79	3	.	3	29	.	7	17
10	43	7	.	.	3	13	3	.	.	3	11	3	7	.	.	13	3	.	3	11
111	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	.	7	3	53	3	67	19	3	.	3
12	.	3	.	3	.	7	19	59	3	.	3	.	29	3	.	3	7	[illegible]	11	.
13	.	.	41	37	3	11	3	.	83	3	3	3	19	.	59	7	3	.	3	.
14	3	13	3	7	73	3	.	3	.	7	23	13	3	.	3	.	.	3	.	3
15	.	3	7	3	11	31	43	23	3	7	3	.	37	3	.	3	67	.	.	7
116	61	43	.	89	3	107	3	7	11	3	.	3	.	7	13	.	3	11	3	.
17	3	7	3	11	19	3	7	3	79	61	.	.	3	.	3	.	13	3	47	3
18	7	3	71	3	29	.	.	11	3	31	3	7	109	3	.	3	11	7	.	73
19	17	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	.	19	3	67	3	13
20	3	17	3	31	7	3	11	3	.	.	13	47	3	43	3	7	107	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
·	7	·	·	3	·	3	·	17	3	07	3	7	11	53	61	3	·	3	·
3	·	3	29	·	3	19	3	11	17	·	7	3	13	3	·	·	3	37	3
·	3	31	3	13	7	109	97	3	·	3	·	11	3	13	3	7	·	·	53
·	79	19	·	3	·	3	11	·	3	17	3	31	·	·	7	3	23	3	59
3	·	3	7	·	3	·	3	19	7	·	11	3	83	3	·	·	3	·	3
·	3	7	3	·	·	11	·	3	13	3	73	17	3	·	3	·	47	·	7
13	·	97	71	3	·	3	7	·	3	11	3	29	7	47	·	3	·	3	11
3	7	3	·	23	3	7	3	·	·	101	·	3	41	3	37	·	3	29	3
7	3	·	3	·	37	·	·	3	·	3	7	67	3	17	3	·	7	11	23
·	·	·	·	3	7	3	47	29	3	7	3	83	·	·	13	3	·	3	·
3	·	3	·	7	3	13	3	·	11	·	19	3	23	3	7	17	3	·	3
43	3	47	3	11	73	·	·	3	7	3	·	101	3	7	3	·	17	13	·
47	53	7	·	3	·	3	19	7	3	·	3	·	67	·	·	3	11	3	7
3	13	3	11	·	3	·	3	·	31	29	13	3	7	3	89	·	3	7	3
23	3	13	3	59	·	7	11	3	·	3	83	7	3	·	3	11	29	19	17
7	61	11	31	3	·	3	·	53	3	·	3	43	·	13	23	3	7	3	·
3	71	3	·	·	3	11	3	·	·	7	·	3	31	3	11	7	3	59	3
37	3	·	3	7	19	41	13	3	23	3	·	·	3	101	3	·	109	61	11
·	·	·	7	3	·	3	31	·	3	19	3	·	·	7	53	3	73	3	13
3	11	3	·	·	3	107	3	7	37	13	·	3	·	3	101	19	3	11	3
59	3	·	3	103	11	19	7	3	29	3	71	13	3	67	3	79	·	7	·
11	7	·	13	3	61	3	59	·	3	41	3	7	43	23	29	3	·	3	·
3	·	3	41	11	3	103	3	·	·	·	7	3	11	3	13	·	3	·	3
·	3	·	3	·	7	13	·	3	·	3	47	·	3	·	3	7	11	·	·
17	·	89	11	3	23	3	·	13	3	73	3	11	·	·	7	3	·	3	·
3	17	3	7	19	3	47	3	·	7	·	·	3	·	3	·	11	3	97	3
61	3	7	3	47	·	·	41	3	·	3	11	·	3	·	3	·	23	·	7
19	113	13	59	3	·	3	7	·	3	·	3	·	7	37	11	3	·	3	31
3	7	3	17	13	3	7	3	43	·	11	·	3	109	3	·	67	3	·	3
7	3	43	3	11	·	·	23	3	83	3	7	·	3	11	3	13	7	41	101
·	11	·	29	3	7	3	13	·	3	7	3	·	37	·	·	3	19	3	·
3	23	3	67	7	3	·	3	31	13	·	97	3	·	3	7	·	3	79	3
11	3	·	3	61	·	17	·	3	7	3	·	·	3	7	3	23	67	103	·
·	73	7	19	3	·	3	17	7	3	·	3	13	11	43	·	3	·	3	7
3	37	3	13	·	3	59	3	11	19	·	53	3	7	3	41	·	3	7	3
·	3	·	3	[illegible]	13	7	·	3	17	3	·	7	3	19	3	·	·	·	·
7	41	11	23	·	19	3	11	79	3	·	3	·	·	·	·	3	7	3	·
3	·	3	·	[illegible]	3	·	3	13	·	7	11	3	71	3	47	7	3	13	3
·	3	·	3	7	·	11	·	3	·	3	17	89	3	·	3	19	107	37	41
·	13	·	7	3	67	3	83	37	3	11	3	17	·	7	43	3	61	3	11
3	·	3	89	·	3	71	3	7	23	·	127	3	13	3	·	·	3	67	3
17	3	19	3	13	31	·	7	3	·	3	·	·	3	13	3	109	37	7	·
·	7	23	47	3	11	3	·	19	3	29	3	7	·	17	·	3	59	3	·
3	47	3	61	·	3	·	3	·	11	·	7	3	·	3	17	41	3	·	3
29	3	17	3	11	7	83	·	3	13	3	·	61	3	23	3	7	71	·	13
13	·	·	17	3	37	3	·	11	3	13	3	·	·	127	7	3	11	3	·
3	·	3	7	17	3	73	3	23	7	43	·	3	29	3	19	·	3	·	3
53	3	7	3	·	17	67	11	3	·	3	·	·	3	113	3	11	·	17	7
·	·	11	37	3	13	3	7	·	3	·	3	·	7	·	13	3	·	3	17
3	7	3	73	·	3	7	3	·	29	·	·	3	·	3	11	·	3	·	3
7	3	·	3	71	109	·	47	3	·	3	7	37	3	·	3	61	7	13	11
103	·	·	·	3	7	3	67	17	3	7	3	·	19	11	·	3	43	3	47
3	11	3	19	7	3	·	3	·	17	·	13	3	·	3	7	·	3	11	3
·	3	13	3	23	11	·	·	3	7	3	29	·	3	7	3	107	·	73	·
11	23	7	·	3	83	3	·	7	3	17	3	47	89	13	·	3	53	3	7
3	29	3	·	11	3	79	3	67	·	·	17	3	7	3	31	13	3	7	3
31	3	·	3	89	·	7	13	3	37	3	·	7	3	·	3	113	11	·	·
7	19	·	11	3	47	3	103	71	3	·	3	11	17	·	·	3	7	3	13
3	·	3	·	·	3	19	3	·	·	7	·	3	79	3	·	7	3	131	3
47	3	11	3	7	·	43	37	3	67	3	11	13	3	17	3	·	·	·	·
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
121	29	3	.	3	.	.	23	43	3	7	3	19	13	3	7	3	73	89	.	11
22	.	.	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3	.	71	11	.	3	19	3	7
23	3	11	3	17	47	3	83	3	89	.	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3
24	.	3	.	3	17	11	7	37	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	.	29
25	7	.	29	19	3	17	3	.	13	3	.	3	23	.	41	.	3	7	3	43
126	3	.	3	.	11	3	53	3	.	19	7	31	3	11	3	.	7	3	.	3
27	41	3	.	3	7	.	17	113	3	53	3	13	.	3	19	3	.	11	67	.
28	71	.	13	7	3	19	3	17	61	3	79	3	11	13	7	.	3	.	3	.
29	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	19	.	3	.	3	31	11	3	41	3
30	31	3	11	3	37	.	73	7	3	17	3	11	103	3	23	3	13	.	7	.
131	.	7	59	.	3	.	3	13	.	3	.	3	7	.	.	11	3	79	3	67
32	3	29	3	.	89	3	.	3	23	13	11	7	3	37	3	97	.	3	.	3
33	13	3	19	3	31	7	.	29	3	43	3	17	.	3	11	3	7	59	.	.
34	.	11	.	43	3	.	3	.	19	3	.	3	13	97	.	7	3	103	3	.
35	3	.	3	7	71	3	.	3	41	7	.	37	3	17	3	107	.	3	.	3
36	11	3	7	3	19	13	79	.	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
37	.	17	.	.	3	.	3	7	47	3	23	3	.	7	17	.	3	13	3	.
38	3	7	3	.	83	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	17	29	3	13	3
39	7	3	17	3	23	.	.	61	3	89	3	7	11	3	71	3	17	7	.	.
40	.	13	.	17	3	7	3	11	.	3	7	3	.	.	.	73	3	17	3	23
41	3	.	3	.	7	3	31	3	37	.	.	11	3	13	3	7	23	3	.	3
42	.	3	53	3	13	17	11	19	3	7	3	109	.	3	7	3	31	.	17	79
43	113	31	7	83	3	53	3	.	7	3	11	3	73	19	.	.	3	37	3	7
44	3	97	3	19	.	3	17	3	29	41	31	.	3	7	3	.	43	3	7	3
45	.	3	.	3	.	.	7	17	3	13	3	61	7	3	29	3	.	.	11	13
46	7	.	.	107	3	11	3	.	17	3	13	3	53	.	19	37	3	7	3	.
47	3	.	3	.	29	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3
48	.	3	83	3	7	89	.	.	3	107	3	.	23	3	.	3	.	53	.	47
49	.	19	.	7	3	13	3	.	11	3	17	3	71	.	7	13	3	11	3	53
50	3	.	3	11	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	79	.	3	31	3
51	109	3	23	3	.	59	29	7	3	.	3	43	17	3	.	3	11	.	7	.
52	101	7	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	.	3	41	3	.
53	3	13	3	.	.	3	11	3	19	.	.	7	3	.	3	11	.	3	89	3
54	.	3	13	3	.	7	.	31	3	.	3	23	113	3	17	3	7	.	.	11
55	.	103	47	.	3	79	3	.	23	3	37	3	.	.	11	7	3	31	3	19
56	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	61	.	3	.	3	29	13	3	11	3
57	19	3	7	3	.	11	.	13	3	.	3	31	43	3	.	3	.	17	.	7
58	11	83	101	.	3	29	3	7	59	3	.	3	.	7	.	.	3	23	3	13
59	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	13	19	3	11	3	59	.	3	17	3
60	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	.	17
1	31	29	107	11	3	7	3	19	103	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	97
2	3	.	3	71	7	3	.	3	53	.	41	73	3	19	3	7	11	3	43	3
3	83	3	11	3	.	.	13	.	3	7	3	11	.	3	7	3	37	13	19	23
4	.	.	7	109	3	101	3	43	7	3	.	3	.	53	.	11	3	.	3	7
5	3	.	3	29	.	3	.	3	73	.	11	59	3	7	3	53	47	3	7	3
6	.	3	.	3	.	19	7	79	3	.	3	13	7	3	11	3	.	.	59	.
7	7	11	13	.	3	.	3	41	31	3	19	3	97	13	.	103	3	7	3	107
8	3	19	3	23	13	3	101	3	.	47	7	.	3	.	3	.	7	3	61	3
9	11	3	31	3	7	.	19	71	3	11	3	.	.	3	.	3	13	.	23	89
0	17	.	37	7	3	113	3	13	43	3	.	3	19	11	7	23	3	.	3	.
1	3	17	3	.	131	3	.	3	7	13	89	41	3	.	3	.	.	3	29	3
2	13	3	.	3	41	61	31	7	3	23	3	37	11	3	59	3	.	.	7	.
3	.	7	17	.	3	97	3	11	29	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	127
4	3	31	3	13	19	3	.	3	.	101	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3
5	.	3	97	3	17	7	11	.	3	.	3	.	.	3	43	3	7	73	.	.
6	19	127	.	.	3	17	3	.	41	3	11	3	.	.	23	7	3	13	3	11
7	3	41	3	7	.	3	109	3	13	7	29	23	3	.	3	.	.	3	13	3
8	.	3	7	3	53	.	17	107	3	61	3	19	.	3	31	3	.	29	11	7
9	29	13	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	19	3	41
0	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	101	3	13	3	.	79	3	.	3
	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
23	43	19	7	3	59	3	.	.	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	
3	109	3	131	.	3	.	3	7	.	11	.	3	.	3	13	17	3	71	
.	3	.	3	.	.	13	7	3	73	3	.	23	3	11	3	.	13	7	5
.	7	79	41	3	.	3	113	13	3	.	3	7	.	103	.	3	.	3	1
3	.	3	83	107	3	.	3	.	.	97	7	3	43	3	.	.	3	17	
11	3	23	3	37	7	.	43	3	11	3	13	31	3	.	3	7	103	29	1
.	59	13	53	3	.	3	.	97	3	61	3	.	11	41	7	3	.	3	
3	.	3	7	13	3	31	3	11	7	67	19	3	37	3	.	83	3	47	
41	3	7	3	.	.	.	.	3	127	3	23	11	3	29	3	13	19	.	
.	31	83	.	3	.	3	7	23	3	53	3	.	7	.	79	3	137	3	4
3	7	3	97	29	3	7	3	.	13	31	11	3	19	3	.	.	3	41	
7	3	.	3	.	.	11	.	3	47	3	7	.	3	.	3	71	7	19	
.	97	43	.	3	7	3	.	139	3	7	3	13	.	61	83	3	23	3	1
3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	.	3	.	
.	3	.	3	109	13	29	131	3	7	3	59	.	3	7	3	.	.	11	11
17	.	7	.	3	11	3	23	7	3	19	3	67	29	73	41	3	13	3	
3	17	3	.	23	3	.	3	13	11	.	109	3	7	3	.	19	3	7	
.	3	29	3	11	.	7	.	3	43	3	79	7	3	83	3	.	.	89	2
7	13	17	43	3	.	3	.	11	3	.	3	19	31	.	127	3	7	3	
3	83	3	11	.	3	37	3	.	.	7	.	3	13	3	29	7	3	.	
.	3	.	3	7	.	.	11	3	.	3	.	41	3	13	3	11	.	.	
.	89	11	7	3	17	3	.	73	3	113	3	.	.	7	37	3	31	3	
3	79	3	23	19	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	.	3	.	
23	3	.	3	.	137	17	7	3	13	3	31	.	3	107	3	.	.	7	1
13	7	.	.	3	73	3	17	.	3	13	3	7	.	11	19	3	.	3	
3	11	3	37	.	3	53	3	17	41	.	7	3	47	3	.	.	3	11	
127	3	.	3	139	7	.	.	3	17	3	19	.	3	89	3	7	.	.	
11	71	.	.	3	13	3	109	47	3	59	3	37	83	67	7	3	19	3	
3	.	3	7	11	3	13	3	.	7	17	.	3	11	3	.	43	3	.	
.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	17	.	3	109	3	53	11	13	
.	47	.	11	3	43	3	7	.	3	37	3	11	7	23	.	3	.	3	
3	7	3	127	.	3	7	3	.	19	.	13	3	17	3	67	11	3	.	
7	3	11	3	101	.	.	.	3	.	3	7	83	3	19	3	.	7	.	3
.	17	.	79	3	7	3	.	31	3	7	3	29	.	13	11	3	41	3	8
3	.	3	137	7	3	.	3	.	.	11	.	3	61	3	7	13	3	29	
.	3	17	3	.	.	.	13	3	7	3	43	97	3	7	3	17	23	.	
.	11	7	17	3	.	3	37	7	3	.	3	31	103	.	.	3	17	3	
3	.	3	113	17	3	.	3	.	139	13	83	3	7	3	.	.	3	7	
11	3	19	3	.	17	7	23	3	11	3	.	7	3	.	3	37	.	17	4
7	.	59	13	3	.	3	97	19	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	1
3	23	3	.	.	3	17	3	11	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	
149	3	53	3	7	97	13	17	3	71	3	.	11	3	37	3	23	13	.	1
29	.	.	7	3	53	3	11	13	3	83	3	137	23	7	89	3	.	3	
3	43	3	.	73	3	29	3	7	17	41	11	3	.	3	19	.	3	.	
.	3	71	3	.	47	11	7	3	101	3	13	.	3	31	3	.	.	7	
97	7	13	23	3	.	3	.	.	3	11	3	7	13	.	.	3	.	3	1
3	73	3	.	13	3	.	3	.	31	.	7	3	127	3	.	.	3	23	
151	3	.	3	.	7	.	19	3	29	3	37	17	3	41	3	7	53	11	7
.	37	.	31	3	11	3	13	.	3	101	3	23	17	.	7	3	.	3	5
3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	31	3	.	.	3	19	
13	3	7	3	11	29	.	61	3	19	3	101	.	3	17	3	73	.	79	
.	.	23	.	3	139	3	7	11	3	.	3	13	7	19	17	3	11	3	6
3	7	3	11	.	3	7	3	.	83	.	41	3	.	3	.	17	3	37	
7	3	89	3	41	13	.	11	3	59	3	7	.	3	23	3	11	7	.	13
71	19	11	.	3	7	3	29	43	3	7	3	.	101	.	.	3	13	3	
3	.	3	.	7	3	11	3	13	.	.	.	3	.	3	7	47	3	13	
137	3	151	3	131	23	37	.	3	7	3	61	19	3	7	3	.	.	.	1
.	13	7	29	3	.	3	.	7	3	.	3	.	.	11	31	3	113	3	
3	11	3	.	.	3	.	3	19	47	71	.	3	7	3	37	89	3	7	
.	3	.	3	13	11	7	.	3	.	3	.	7	3	13	3	29	.	139	
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
181	7	3	67	3	11	41	37	.	3	17	3	7	.	3	13	3	.	7	31	.
82	.	.	.	19	3	7	3	.	11	3	7	3	101	47	.	.	3	11	3	29
83	3	.	3	11	7	3	.	3	.	19	17	.	3	31	3	7	53	3	.	3
84	.	3	.	3	.	37	59	11	3	7	3	17	.	3	7	3	11	.	53	13
85	13	.	7	67	3	19	3	31	7	3	13	3	17	.	.	29	3	.	3	7
186	3	23	3	47	.	3	11	3	.	71	19	.	3	7	3	11	.	3	7	3
87	17	3	.	3	73	29	7	137	3	.	3	89	7	3	.	3	19	.	.	11
88	7	17	109	.	3	13	3	.	113	3	43	3	79	23	11	13	3	7	3	.
89	3	11	3	.	67	3	13	3	61	.	7	.	3	41	3	17	7	3	11	3
90	.	3	17	3	7	11	23	.	3	.	3	.	.	3	.	3	17	61	13	71
191	11	107	.	7	3	.	3	29	19	3	127	3	.	.	7	31	3	17	3	73
92	3	13	3	.	11	3	.	3	7	.	37	13	3	11	3	.	101	3	23	3
93	37	3	13	3	19	17	107	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	11	7	19
94	53	7	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	7	.	13	.	3	101	3	17
95	3	.	3	.	31	3	17	3	.	23	.	7	3	.	3	19	11	3	.	3
196	43	3	11	3	.	7	71	13	3	103	3	11	.	3	.	3	7	47	.	.
97	.	.	23	.	3	.	3	53	17	3	.	3	131	73	47	7	3	.	3	13
98	3	.	3	7	.	3	.	3	31	7	11	103	3	59	3	.	.	3	101	3
99	71	3	7	3	.	.	41	19	3	.	3	.	13	3	11	3	.	.	.	7
200	.	11	31	13	3	.	3	7	.	3	17	3	43	7	53	.	3	71	3	101
201	3	7	3	19	.	3	7	3	23	.	.	17	3	.	3	13	61	3	19	3
02	7	3	47	3	.	23	13	.	3	11	3	7	17	3	.	3	103	7	.	53
03	47	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3	89	11	19	.	3	.	3	.
04	3	113	3	41	7	3	97	3	11	59	.	.	3	.	3	7	31	3	103	3
05	.	3	61	3	29	.	131	67	3	7	3	13	11	3	7	3	59	.	43	.
206	107	19	7	73	3	.	3	11	7	3	23	3	.	13	137	17	3	.	3	7
07	3	.	3	.	13	3	19	3	.	.	79	11	3	7	3	.	17	3	7	3
08	29	3	.	3	23	31	7	41	3	.	3	.	7	3	.	3	13	17	.	.
09	7	23	19	.	3	.	3	13	67	3	11	3	.	.	31	139	3	7	3	11
10	3	37	3	.	.	3	.	3	19	13	7	107	3	29	3	.	7	3	17	3
211	13	3	.	3	7	.	61	.	3	31	3	.	59	3	.	3	.	.	11	17
12	79	53	29	7	3	11	3	.	89	3	.	3	13	.	7	61	3	107	3	19
13	3	131	3	13	41	3	23	3	7	11	.	.	3	.	3	73	.	3	.	3
14	19	3	43	3	11	13	.	7	3	109	3	47	.	3	.	3	.	.	7	.
15	23	7	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	113	.	.	3	11	3	.
216	3	59	3	11	.	3	47	3	13	.	53	7	3	.	3	23	109	3	13	3
17	.	3	.	3	47	7	.	11	3	.	3	29	23	3	.	3	7	19	71	.
18	.	13	11	.	3	.	3	19	.	3	131	3	.	79	43	7	3	.	3	61
19	3	29	3	7	.	3	11	3	127	7	.	31	3	13	3	11	.	3	.	3
20	.	3	7	3	13	.	.	29	3	.	3	.	71	3	13	3	.	.	19	7
221	17	.	.	.	3	37	3	7	.	3	67	3	41	7	11	.	3	.	3	79
22	3	7	3	.	113	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	31	.	3	11	3
23	7	3	79	3	59	11	.	.	3	13	3	7	.	3	61	3	.	7	.	13
24	11	.	17	37	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	113	43	3	83	3	149
25	3	19	3	17	7	3	.	3	.	.	107	67	3	11	3	7	19	3	59	3
226	.	3	139	3	17	131	19	.	3	7	3	.	37	3	7	3	.	11	.	.
27	.	61	7	11	3	13	3	.	7	3	.	3	11	.	.	13	3	23	3	7
28	3	.	3	.	.	3	13	3	.	89	.	137	3	7	3	47	11	3	7	3
29	59	3	11	3	.	.	7	103	3	.	3	11	7	3	127	3	83	.	13	109
30	7	.	.	.	3	.	3	17	.	3	47	3	.	41	.	11	3	7	3	.
231	3	13	3	.	19	3	.	3	17	.	7	13	3	97	3	.	7	3	.	3
32	.	3	13	3	7	43	53	.	3	17	3	.	31	3	11	3	.	.	.	23
33	19	11	.	7	3	61	3	.	.	3	97	3	103	67	7	19	3	149	3	.
34	3	47	3	.	29	3	31	3	7	.	17	53	3	23	3	83	13	3	.	3
35	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	17	.	3	103	3	31	.	7	.
236	67	7	41	59	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	13
37	3	.	3	23	.	3	.	3	11	.	13	7	3	17	3	.	37	3	53	3
38	17	3	.	3	107	7	29	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	.	23	.
39	43	17	.	13	3	31	3	11	.	3	.	3	.	29	17	7	3	.	3	103
40	3	67	3	7	.	3	41	3	.	7	.	11	3	.	3	13	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
241	7	·	·	·	3	·	3	89	·	3	23	3	59	·	·	101	3	7	3	19
42	3	·	3	43	11	3	61	3	53	·	7	·	3	11	3	·	7	3	·	3
43	19	3	109	3	7	41	·	83	3	13	3	·	29	3	·	3	101	11	97	13
44	13	23	·	7	3	·	3	·	·	3	13	3	11	53	7	·	3	·	3	23
45	3	107	3	·	127	3	·	3	7	137	·	19	3	·	3	53	11	3	·	3
246	73	3	11	3	·	151	103	7	3	·	3	11	·	3	71	3	41	19	7	157
47	17	7	31	·	3	13	3	19	59	3	79	3	7	·	29	11	3	109	3	·
48	3	17	3	·	43	3	13	3	·	103	11	7	3	19	3	59	·	3	·	3
49	37	3	·	3	29	7	·	·	3	·	3	97	107	3	11	3	7	·	13	61
50	23	11	17	89	3	·	3	127	131	3	29	3	·	·	·	7	3	79	3	37
251	3	13	3	7	·	3	·	3	·	7	·	13	3	41	3	23	31	3	·	3
52	11	3	7	3	17	19	151	·	3	11	3	·	23	3	·	3	43	·	·	7
53	·	·	·	·	3	17	3	7	·	3	19	3	73	7	13	·	3	·	3	·
54	3	7	3	·	·	3	7	3	11	·	47	59	3	29	3	·	13	3	·	3
55	7	3	23	3	97	31	17	13	3	·	3	7	11	3	·	3	·	7	59	29
256	·	·	29	·	3	7	3	11	·	3	7	3	19	·	31	·	3	·	3	13
57	3	·	3	47	7	3	·	3	17	29	13	11	3	·	3	7	·	3	·	3
58	·	3	131	3	53	83	11	·	3	7	3	23	13	3	7	3	·	43	·	·
59	59	·	7	13	3	·	3	·	7	3	11	3	·	·	37	·	3	·	3	7
60	3	·	3	31	19	3	·	3	·	53	17	·	3	7	3	13	·	3	7	3
261	43	3	·	3	·	·	7	·	3	151	3	17	7	3	59	3	·	13	11	79
62	7	·	73	·	3	11	3	157	13	3	·	3	17	37	·	19	3	7	3	·
63	3	29	3	·	83	3	·	3	·	11	7	113	3	17	3	·	7	3	·	3
64	17	3	·	3	7	61	·	29	3	·	3	13	·	3	·	3	137	31	53	·
65	·	17	13	7	3	·	3	23	11	3	41	3	43	13	7	·	3	11	3	139
266	3	37	3	11	13	3	43	3	7	79	·	31	3	·	3	17	·	3	·	3
67	·	3	17	3	·	·	·	7	3	·	3	·	·	3	·	3	11	47	7	23
68	·	7	11	17	3	·	3	13	·	3	139	3	7	·	47	·	3	17	3	·
69	3	·	3	71	17	3	11	3	·	13	·	7	3	23	3	11	29	3	·	3
70	13	3	113	3	·	7	·	41	3	61	3	151	·	3	19	3	7	·	17	11
271	41	·	·	·	3	19	3	47	37	3	·	3	13	43	11	7	3	·	3	17
72	3	11	3	7	·	3	17	3	163	7	19	73	3	113	3	·	·	3	11	3
73	23	3	7	3	31	11	59	17	3	89	3	·	151	3	·	3	19	37	23	7
74	11	67	·	·	3	79	3	7	17	3	·	3	·	7	·	23	3	13	3	·
75	3	7	3	·	11	3	7	3	13	17	·	·	3	11	3	·	·	3	13	3
276	7	3	19	3	·	53	·	71	3	23	3	7	·	3	29	3	131	7	·	43
77	·	13	103	11	3	7	3	53	19	3	7	3	11	·	·	·	3	·	3	·
78	3	·	3	·	7	3	·	3	43	·	·	17	3	13	3	7	11	3	·	3
79	·	3	11	3	13	103	·	·	3	7	3	11	17	3	7	3	·	·	·	19
80	·	41	7	37	3	109	3	·	7	3	·	3	·	17	23	11	3	29	3	7
281	3	157	3	·	·	3	31	3	61	·	11	23	3	7	3	19	107	3	7	3
82	·	3	67	3	·	89	7	·	3	13	3	·	7	3	11	3	31	61	47	13
83	7	11	·	·	3	23	3	·	127	3	13	3	41	29	43	17	3	7	3	·
84	3	·	3	·	·	3	157	3	97	43	7	·	3	·	3	·	7	3	·	3
85	11	3	29	3	7	·	·	19	3	11	3	47	103	3	·	3	·	17	·	·
286	37	·	·	7	3	13	3	·	·	3	·	3	·	11	7	13	3	·	3	·
87	3	·	3	19	·	3	13	3	7	·	23	·	3	59	3	29	41	3	17	3
88	83	3	·	3	47	·	·	7	3	19	3	127	11	3	·	3	151	·	7	17
89	·	7	137	·	3	29	3	11	·	3	·	3	7	·	19	43	3	103	3	·
90	3	13	3	·	67	3	·	3	·	·	·	7	3	·	3	71	113	3	31	3
291	·	3	13	3	43	7	11	37	3	·	3	·	·	3	·	3	7	151	·	103
92	·	19	·	·	3	131	3	61	·	3	11	3	·	23	13	7	3	·	3	11
93	3	·	3	7	·	3	19	3	109	7	·	139	3	·	3	·	13	3	·	·
94	·	3	7	3	·	67	23	13	3	·	3	·	19	3	·	3	59	·	11	7
95	·	163	19	23	3	11	3	7	53	3	·	3	·	7	·	109	3	31	3	11
296	3	7	3	29	·	3	7	3	19	11	13	·	3	·	3	107	·	3	23	·
97	7	3	61	3	11	43	·	113	3	·	3	7	13	3	131	3	·	7	151	71
98	17	·	41	13	3	7	3	·	11	3	7	3	23	·	·	53	3	11	3	19
99	3	17	3	11	7	3	·	3	·	23	·	173	3	37	3	7	79	3	·	3
300	19	3	37	3	·	·	13	11	3	7	3	·	59	3	7	3	11	13	·	151
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
241	.	3	7	3	37	73	11	.	3	23	3	.	.	3	19	3	17	13	.	7
42	.	79	127	17	3	19	3	7	13	3	11	3	.	7	149	107	3	17	3	11
43	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	19	.	3	37	3	29	.	3	31	3
44	7	3	37	3	61	17	43	.	3	.	3	7	.	3	47	3	19	7	11	.
45	.	43	13	41	3	7	3	79	.	3	7	3	47	13	23	67	3	.	3	17
246	3	89	3	.	7	3	17	3	.	11	.	23	3	.	3	7	.	3	.	3
47	53	3	19	3	11	.	.	17	3	7	3	71	.	3	7	3	13	.	137	.
48	.	29	7	.	3	23	3	13	7	3	.	3	139	149	41	.	3	11	3	7
49	3	.	3	11	109	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	67	3	7	3
50	13	3	.	3	19	71	7	11	3	.	3	31	7	3	.	3	11	23	.	19
251	7	.	11	139	3	.	3	.	.	3	17	3	13	.	89	.	3	7	3	113
52	3	.	3	13	.	3	11	3	37	127	7	17	3	131	3	11	7	3	41	3
53	101	3	.	3	7	13	.	23	3	.	3	41	17	3	53	3	.	67	109	11
54	31	.	.	7	3	.	3	.	.	3	73	3	83	17	7	71	3	13	3	43
55	3	11	3	61	.	3	37	3	7	107	.	.	3	.	3	.	157	3	11	3
256	113	3	.	3	67	11	.	7	3	.	3	.	61	3	17	3	23	.	7	31
57	11	7	43	.	3	.	3	73	.	3	149	3	7	19	107	17	3	.	3	.
58	3	103	3	19	11	3	.	3	41	.	113	7	3	11	3	.	17	3	19	3
59	.	3	101	3	13	7	23	.	3	19	3	83	.	3	13	3	7	11	.	.
60	109	.	71	11	3	67	3	131	29	3	89	3	11	.	19	7	3	97	3	.
261	3	.	3	7	.	3	137	3	.	7	.	47	3	.	3	.	11	3	17	3
62	.	3	7	3	.	.	.	109	3	13	3	11	41	3	97	3	61	.	.	7
63	13	19	.	43	3	41	3	7	.	3	13	3	23	7	.	11	3	.	3	.
64	3	7	3	.	47	3	7	3	103	23	11	.	3	71	3	.	59	3	.	3
65	7	3	.	3	.	101	31	163	3	.	3	7	19	3	11	3	.	7	.	67
266	29	11	19	53	3	7	3	.	149	3	7	3	.	.	.	13	3	.	3	.
67	3	31	3	.	7	3	13	3	19	41	.	61	3	.	3	7	73	3	127	3
68	11	3	107	3	.	.	67	97	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	37
69	.	.	7	.	3	59	3	149	7	3	53	3	.	11	.	137	3	.	3	7
70	3	13	3	.	.	3	.	3	11	.	.	13	3	7	3	103	.	3	7	3
271	19	3	13	3	157	23	7	101	3	29	3	.	7	3	31	3	.	71	.	59
72	7	.	97	.	3	137	3	11	.	3	.	3	.	.	13	29	3	7	3	.
73	3	17	3	109	.	3	.	3	101	31	7	11	3	139	3	61	7	3	.	3
74	97	3	.	3	7	29	11	13	3	83	3	.	.	3	.	3	37	19	31	107
75	.	59	17	7	3	43	3	19	79	3	11	3	.	.	7	47	3	41	3	11
276	3	.	3	17	139	3	73	3	7	.	13	89	3	19	3	.	.	3	.	3
77	.	3	41	3	17	.	.	7	3	.	3	.	13	3	37	3	.	.	7	.
78	.	7	89	13	3	11	3	29	47	3	61	3	7	.	79	167	3	.	3	23
79	3	.	3	73	.	3	.	3	83	11	101	7	3	.	3	13	23	3	.	3
80	.	3	.	3	11	7	13	.	3	67	3	43	.	3	.	3	7	13	.	.
281	.	47	37	29	3	.	3	17	11	3	19	3	.	.	71	7	3	11	3	163
82	3	19	3	7	59	3	23	3	17	7	.	.	3	.	3	.	19	3	.	3
83	.	3	7	3	79	113	19	11	3	17	3	13	101	3	.	3	11	.	73	7
84	23	37	11	149	3	.	3	7	71	3	.	3	19	7	61	31	3	.	3	.
85	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	17	.	3	101	3	11	.	3	.	3
286	7	3	.	3	.	.	109	.	3	53	3	7	23	3	.	3	13	7	.	11
87	.	.	149	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	107	11	.	3	.	3	31
88	3	11	3	.	7	3	.	3	.	13	67	.	3	17	3	7	167	3	11	3
89	13	3	23	3	.	11	83	59	3	7	3	.	73	3	7	3	53	79	107	47
90	11	17	7	.	3	.	3	41	7	3	.	3	13	127	17	19	3	47	3	7
291	3	.	3	13	11	3	.	3	31	.	163	.	3	7	3	17	.	3	7	3
92	.	3	17	3	29	13	7	.	3	73	3	19	7	3	.	3	17	11	.	83
93	7	149	31	11	3	.	3	43	23	3	29	3	11	.	.	.	3	7	3	.
94	3	.	3	89	17	3	79	3	13	.	7	41	3	.	3	37	7	3	13	3
95	29	3	11	3	7	17	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3	127	101	17	.
296	149	13	47	7	3	.	3	.	.	3	59	3	67	.	7	11	3	23	3	17
97	3	.	3	.	.	3	17	3	7	19	11	97	3	13	3	.	31	3	83	3
98	.	3	73	3	13	.	.	7	3	.	3	.	.	3	11	3	71	67	7	29
99	61	7	29	.	3	19	3	23	17	3	31	3	7	.	157	.	3	89	3	131
300	3	41	3	.	23	3	107	3	.	17	19	7	3	67	3	.	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
31	.	7	.	3	.	3	.	7	3	47	3	29	.	.	.	3	43	3	7
3	.	3	17	.	3	11	3	47	.	167	19	3	7	3	11	.	3	7	3
157	3	.	3	17	.	7	.	3	.	3	13	7	3	23	3	.	19	.	11
7	.	13	47	3	17	3	19	29	3	.	3	.	13	11	61	3	7	3	.
3	11	3	.	13	3	.	3	23	131	7	.	3	19	3	.	7	3	11	3
71	3	127	3	7	11	17	67	3	113	3	109	.	3	.	3	13	.	19	.
11	.	.	7	3	.	3	13	31	3	.	3	79	73	7	59	3	71	3	97
3	.	3	.	11	3	.	3	7	13	29	.	3	11	3	.	.	3	109	3
13	3	31	3	.	19	43	7	3	17	3	157	.	3	.	3	.	11	7	.
29	7	101	11	3	.	3	.	67	3	19	3	7	.	41	.	3	37	3	61
3	19	3	13	53	3	29	3	.	.	17	7	3	163	3	.	11	3	.	3
41	3	11	3	23	7	19	.	3	.	3	11	.	3	.	3	7	157	.	.
113	23	.	131	3	173	3	.	.	3	.	3	17	.	.	7	3	13	3	23
3	31	3	7	101	3	89	3	13	7	11	53	3	17	3	149	23	3	13	3
17	3	7	3	.	.	.	43	3	29	3	41	.	3	11	3	.	.	.	7
.	11	.	73	3	101	3	7	103	3	.	3	47	7	17	29	3	.	3	.
3	7	3	37	19	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	17	.	3	53	3
7	3	17	3	13	29	.	47	3	11	3	7	139	3	13	3	17	7	.	.
19	61	.	17	3	7	3	59	137	3	7	3	37	11	109	19	3	17	3	43
3	.	3	.	7	3	101	3	11	31	.	.	3	103	3	7	179	3	73	3
47	3	97	3	163	17	.	.	3	7	3	19	11	3	7	3	.	.	17	13
13	.	7	31	3	.	3	11	7	3	13	3	167	.	.	103	3	19	3	7
3	.	3	.	79	3	17	3	.	.	.	11	3	7	3	73	.	3	7	3
.	3	23	3	.	.	7	17	3	.	3	.	7	3	163	3	.	.	71	37
7	.	.	19	3	13	3	31	17	3	11	3	.	.	.	13	3	7	3	11
3	.	3	.	.	3	13	3	.	17	7	67	3	.	3	127	7	3	.	3
53	3	.	3	7	.	.	.	3	43	3	23	71	3	19	3	29	137	11	.
.	.	53	7	3	11	3	37	23	3	17	3	.	.	7	.	3	.	3	107
3	13	3	.	.	3	.	3	7	11	19	13	3	.	3	.	.	3	47	3
61	3	13	3	11	.	137	7	3	.	3	.	17	3	.	3	19	173	7	.
79	7	.	113	3	.	3	.	11	3	157	3	7	17	13	31	3	11	3	.
3	.	3	11	.	3	59	3	139	.	149	7	3	167	3	43	13	3	.	3
.	3	19	3	.	7	.	11	3	47	3	.	.	3	17	3	7	.	.	.
127	.	11	.	3	.	3	23	19	3	.	3	101	67	29	7	3	53	3	13
3	.	3	7	23	3	11	3	.	7	13	.	3	.	3	11	17	3	.	3
.	3	7	3	19	.	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	.	17	.	7
67	.	37	13	3	.	3	7	.	3	29	3	89	7	11	.	3	41	3	.
3	7	3	.	.	3	7	3	31	149	.	.	3	23	3	13	43	3	11	3
7	3	41	3	.	11	13	107	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	83	17
11	37	31	71	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	101	.	3	59	3	79
3	67	3	23	7	3	109	3	149	.	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3
23	3	79	3	.	.	.	19	3	7	3	13	.	3	7	3	97	11	23	29
.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	13	.	23	3	61	3	7
3	.	3	19	13	3	127	3	.	29	173	.	3	7	3	.	11	3	7	3
.	3	11	3	.	.	7	.	3	19	3	11	7	3	.	3	13	.	179	.
7	.	.	53	3	.	3	13	89	3	31	3	.	59	19	11	3	7	3	.
3	.	3	61	103	3	149	3	.	13	7	.	3	47	3	.	7	3	.	3
13	3	.	3	7	31	37	.	3	97	3	29	61	3	11	3	.	.	.	.
17	11	67	7	3	.	3	.	47	3	53	3	13	181	7	.	3	83	3	.
3	17	3	13	157	3	19	3	7	.	.	23	3	53	3	37	67	3	101	3
11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.	19	3	41	3	.	113	7	.
.	7	17	137	3	23	3	41	.	3	.	3	7	11	167	131	3	13	3	101
3	43	3	17	.	3	.	3	11	.	.	7	3	89	3	.	59	3	13	3
.	3	.	3	17	7	107	.	3	.	3	71	11	3	.	3	7	23	.	.
131	13	.	.	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	19
3	.	3	7	149	3	.	3	179	7	23	11	3	13	3	157	29	3	43	3
19	3	7	3	13	71	11	23	3	139	3	.	.	3	13	3	103	31	.	7
.	.	61	.	3	59	3	7	113	3	11	3	.	7	.	.	3	73	3	11
3	7	3	149	.	3	7	3	17	.	37	19	3	.	3	83	127	3	103	3
7	3	.	3	.	.	.	181	3	13	3	7	137	3	.	3	23	7	11	13
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
301	11	3	53	3	.	7	97	.	3	11	3	103	.	3	.	3	7	109	.	13
02	13	.	79	.	3	53	3	.	.	3	13	3	107	11	31	7	3	.	3	41
03	3	127	3	7	97	3	.	3	11	7	37	17	3	23	3	.	.	3	113	3
04	37	3	7	3	83	41	.	.	3	31	3	29	11	3	43	3	.	.	.	7
05	137	.	.	.	3	13	3	7	19	3	.	3	53	7	73	13	3	.	3	37
306	3	7	3	23	.	3	7	3	.	37	.	11	3	61	3	.	47	3	.	3
07	7	3	.	3	19	.	11	29	3	.	3	7	.	3	17	3	41	7	13	19
08	.	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	89	67	17	3	.	3	11
09	3	13	3	83	7	3	173	3	.	47	.	13	3	.	3	7	17	3	139	3
10	.	3	13	3	89	.	47	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	17	11	137
311	.	.	7	.	3	11	3	71	7	3	.	3	.	.	13	.	3	.	3	7
12	3	.	3	.	43	3	.	3	.	11	.	31	3	7	3	67	13	3	7	3
13	107	3	.	3	11	79	7	13	3	137	3	.	7	3	.	3	.	.	.	17
14	7	71	83	163	3	73	3	.	11	3	.	3	.	19	23	.	3	7	3	13
15	3	139	3	11	37	3	.	3	131	.	7	23	3	.	3	31	7	3	19	3
316	31	3	.	3	7	.	.	11	3	19	3	79	13	3	.	3	11	41	29	.
17	.	113	11	7	3	23	3	.	.	3	43	3	61	37	7	83	3	.	3	.
18	3	53	3	.	151	3	11	3	7	.	127	71	3	.	3	11	.	3	167	3
19	89	3	.	3	31	.	13	7	3	.	3	113	.	3	29	3	.	13	7	11
20	.	7	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	11	.	3	67	3	.
321	3	11	3	.	29	3	19	3	53	.	23	7	3	.	3	.	.	3	11	3
22	.	3	.	3	.	7	41	23	3	59	3	13	19	3	83	3	7	43	.	.
23	11	.	13	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	13	139	7	3	29	3	179
24	3	17	3	7	11	3	.	3	19	7	47	.	3	11	3	53	.	3	.	3
25	43	3	7	3	.	.	29	.	3	.	3	.	31	3	.	3	13	11	37	7
326	103	.	17	11	3	89	3	7	37	3	41	3	11	.	.	97	3	.	3	19
27	3	7	3	17	181	3	7	3	.	13	73	.	3	.	3	.	11	3	.	3
28	7	3	11	3	17	59	23	.	3	71	3	7	131	3	.	3	31	7	67	167
29	83	31	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	13	.	.	11	3	.	3	.
30	3	.	3	13	7	3	43	3	.	.	11	19	3	.	3	7	.	3	23	3
331	.	3	71	3	.	43	17	41	3	7	3	.	.	3	7	3	.	19	89	.
32	41	11	7	79	3	29	3	17	7	3	107	3	23	83	.	.	3	11	3	7
33	3	.	3	.	73	3	61	3	13	23	.	29	3	7	3	173	.	3	7	3
34	11	3	.	3	.	109	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	107	.	19	139
35	7	13	23	37	3	.	3	.	59	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.
336	3	73	3	97	41	3	131	3	11	151	7	.	3	13	3	59	7	3	31	3
37	.	3	.	3	7	19	.	.	3	.	3	17	11	3	13	3	.	47	.	73
38	.	97	.	7	3	.	3	11	.	3	19	3	17	31	7	.	3	.	3	109
39	3	19	3	29	.	3	.	3	7	53	61	11	3	17	3	41	19	3	.	3
40	17	3	.	3	.	21	11	7	3	13	3	53	173	3	89	3	73	103	7	13
341	13	7	.	.	3	127	3	47	.	3	11	3	7	.	17	179	3	31	3	11
42	3	.	3	.	.	3	.	3	43	.	151	7	3	.	3	17	53	3	.	3
43	.	3	17	3	.	7	.	.	3	37	3	31	.	3	137	3	7	163	11	41
44	47	131	.	17	3	11	3	.	.	3	23	3	29	.	.	7	3	17	3	.
45	3	109	3	7	17	3	13	3	181	7	71	151	3	.	3	.	.	3	29	3
346	.	3	7	3	11	17	.	37	3	.	3	.	79	3	.	3	113	.	13	7
47	19	23	.	.	3	.	3	7	11	3	83	3	.	7	43	19	3	11	3	17
48	3	7	3	11	71	3	7	3	.	43	.	13	3	.	3	139	23	3	.	3
49	7	3	13	3	.	.	73	11	3	41	3	7	.	3	59	3	11	7	79	31
50	.	.	11	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	13	.	3	19	3	.
351	3	.	3	.	7	3	11	3	.	17	29	127	3	151	3	7	13	3	61	3
52	.	3	.	3	37	179	.	13	3	7	3	.	.	3	7	3	.	29	47	11
53	23	.	7	19	3	.	3	113	7	3	17	3	.	41	11	43	3	.	3	7
54	3	11	3	59	.	3	29	3	79	19	13	17	3	7	3	23	.	3	7	3
55	73	3	31	3	43	11	7	.	3	.	3	47	7	3	19	3	.	.	.	97
356	7	101	181	13	3	19	3	53	.	3	.	3	31	17	127	89	3	7	3	29
57	3	.	3	.	11	3	47	3	.	83	7	37	3	11	3	13	7	3	.	3
58	.	3	23	3	7	.	13	.	3	29	3	.	53	3	17	3	19	11	.	.
59	.	157	41	7	3	.	3	.	13	3	.	3	11	.	7	17	3	.	3	.
60	3	31	3	107	.	3	.	3	7	.	43	109	3	.	3	151	11	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
13	79	·	·	3	7	3	19	41	3	7	3	·	23	·	71	3	47	3	37
3	41	3	·	7	3	·	3	29	11	17	·	3	19	3	7	·	3	67	3
31	3	·	3	11	·	23	·	3	7	3	17	47	3	7	3	·	·	19	103
89	59	7	23	3	13	3	79	7	3	73	3	17	·	83	13	3	11	3	7
3	173	3	1	29	3	13	3	59	·	·	·	3	7	3	61	·	3	7	3
17	3	·	3	31	19	7	11	3	53	3	·	7	3	·	3	11	·	13	67
7	17	11	·	3		3	73	·	3	19	3	23	109	17	·	3	7	3	·
3	13	3	·	131	3	11	3	·	23	7	13	3	·	3	11	7	3	·	3
·	3	[illegible]	3	7	·	19	·	3	·	3	·	·	3	43	3	17	·	·	11
163	·	23	7	3	·	3	·	·	3	61	3	19	29	7	·	3	17	3	·
3	11	3	43	17	3	·	3	7	·	137	107	3	71	3	·	13	3	11	3
·	3	29	3	127	11	·	7	3	·	3	59	31	3	23	3	167	·	7	193
11	7	·	·	3	·	3	67	·	3	163	3	7	37	·	·	3	107	3	13
3	113	3	·	11	3	17	3	23	·	13	7	3	11	3	29	·	3	·	3
·	3	·	3		7	·	17	3	157	3	·	13	3	·	3	7	11	·	·
19	31	·	11	3	29	3	·	17	3	191	3	11	·	61	7	3	·	3	·
3	37	3	7	43	3	·	3	67	7	31	29	3	97	3	13	11	3	·	3
103	3	7	3	·	·	13	59	3	109	3	11	·	3	157	3	79	13	·	7
151	29	·	167	3	31	3	7	13	3	17	3	83	7	59	11	3	19	3	137
3	7	3	191		3	7	3	193	47	11	17	3	73	3	·	109	3	·	3
7	3	53	3	23	·	47	·	3	67	3	7	17	3	11	3	43	7	37	·
·	11	13	19	3	7	3	·	37	3	7	3	·	13	·	·	3	167	3	23
3	·	3	29	7	3	·	3	·	19	·	·	3	·	3	7	23	3	31	3
11	3	193	3	71	107	41	103	3	7	3	83	·	3	7	3	13	37	·	·
·	139	7	97	3	19	3	13	7	3	59	3	53	11	89	17	3	·	3	7
3	·	3	·	·	3	23	3	11	13	11	·	3	7	3	·	17	3	7	3
13	3	·	3	·	·	7	3	3	·	3	·	7	3	·	3	19	17	·	·
7	·	151	197	3	37	3	11	·	3	41	3	13	·	71	·	3	7	3	53
3	·	3	13	167	3	·	3	·	·	7	11	3	·	3	23	7	3	17	3
43	3	19	3	7	13	11	·	3	·	3	31	23	3	103	3	·	·	·	17
61	·	·	7	3	·	3	·	19	3	11	3	109	·	7	·	3	13	3	11
3	97	3	·	113	3	·	3	7	61	·	·	3	·	3	·	·	3	13	3
·		23	3	19	·	·	7	3	·	3	67	37	3	139	3	·	·	7	19
31	7	157		3	11	3	·	79	3	89	3	7	47	113	·	3	·	3	103
3	·	3	·	·	3	43	3	·	11	29	7	3	13	3	19	·	3	71	3
199	·	·	3	11	7	173	·	3	·	3	23	·	·	13	3	7	29	41	31
29	·	59	·	3	151	3	·	11	3	·	3	67	·	79	7	3	11	3	·
3	53	3	7	41	3	29	3	·	7	·	·	3	61	3	·	·	3	·	3
·	3	7	3	107	167	179	11	3	13	3	·	73	3	·	3	11	59	43	7
13	109	11	·	3	·	3	7	31	3	13	3	·	7	·	·	3	23	3	29
3	7	3	19	·	3	7	3	53	·	·	·	3	67	3	11	137	3	19	3
7	3	31	3	79	·	131	37	3	19	3	7	·	3	·	3	·	7	167	11
191	41	17	173	3	7	3	23	61	3	7	3	31	53	11	13	3	·	3	157
3	11	3	17	7	3	13	3	83	·	·	·	3	·	3	7	37	3	11	3
101	3	·	3	17	11	31	·	3	7	3	·	·	3	7	3	71	·	13	23
11	19	7	·	3	17	3	151	7	3	·	3	41	179	·	·	3	97	3	7
3	13	3	·	11	3	19	3	43	193	139	13	3	7	3	·	131	3	7	3
·	3	13	3	37	·	7	·	3	·	3	·	7	3	97	3	·	11	·	·
7	·	19	11	3	163	3	17	151	3	·	3	11	·	13	·	3	7	3	·
3	131	3	23	·	3	·	3	17	·	7	89	3	37	3	·	7	3	·	3
23	3	11	3	7	·	·	13	3	17	3	11	·	3	31	3	·	·	23	·
·	·	89	7	3	·	3	47	·	3	·	3	·	·	7	11	3	·	3	13
3	103	3	101	109	3	79	3	7	31	11	37	3	·	3	67	·	3	173	3
19	3	47	3	·	·	83	7	3	23	3	17	13	3	11	3	29	·	7	181
47	7	·	13	3	·	3	·	·	3	131	3	7	41	73	·	3	·	3	·
3	·	3	·	·	3	·	3	·	107	·	7	3	17	3	13	·	3	·	3
11	3	179	3	53	7	13	·	3	11	3	·	29	3	·	3	7	13	109	83
·	17	97	·	3	·	3	19	13	3	151	3	59	11	17	7	3	·	3	·
3	·	3	7	·	3	167	3	11	7	·	23	3	19	3	17	·	3	·	3
97	3	7	3	43	·	·	·	3	·	3	13	11	3	127	3	17	·	19	7
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
361	.	3	11	3	.	29	59	7	3	61	3	11	97	3	.	3	.	17	7	53
62	.	7	13	101	3	.	3	.	19	3	.	3	7	13	131	11	3	.	3	.
63	3	.	3	103	13	3	41	3	37	.	11	7	3	.	3	.	151	3	17	3
64	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	.	191	3	11	3	7	.	.	17
65	.	11	139	.	3	.	3	13	.	3	79	3	157	.	.	7	3	23	3	.
366	3	.	3	7	61	3	37	3	.	7	.	43	3	.	3	19	.	3	.	3
67	11	3	7	3	.	97	.	83	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	31	7
68	43	137	.	29	3	191	3	7	.	3	.	3	13	7	.	37	3	79	3	.
69	3	7	3	13	23	3	7	3	11	.	103	.	3	31	3	47	71	3	.	3
70	7	3	.	3	.	13	101	19	3	131	3	7	11	3	.	3	29	7	.	23
371	97	53	73	.	3	7	3	11	.	3	7	3	.	19	41	.	3	13	3	.
72	3	.	3	19	7	3	83	3	13	.	.	11	3	23	3	7	89	3	13	3
73	41	3	.	3	.	.	11	.	3	7	3	.	29	3	7	3	139	61	.	149
74	17	13	7	47	3	.	3	89	7	3	11	3	37	.	19	.	3	.	3	7
75	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
376	23	3	.	3	13	.	7	139	3	101	3	41	7	3	13	3	.	.	11	.
77	7	19	17	61	3	11	3	179	107	3	37	3	.	.	29	23	3	7	3	.
78	3	.	3	17	.	3	19	3	.	11	7	.	3	43	3	.	7	3	.	3
79	.	3	.	3	7	.	.	43	3	13	3	163	19	3	.	3	.	.	.	13
80	13	.	19	7	3	17	3	.	11	3	13	3	113	.	7	41	3	11	3	31
381	3	.	3	11	31	3	.	3	7	59	.	73	3	.	3	.	181	3	.	3
82	29	3	67	3	.	83	17	7	3	.	3	101	.	3	.	3	11	149	7	.
83	.	7	11	89	3	13	3	17	.	3	.	3	7	131	23	13	3	.	3	19
84	3	.	3	.	.	3	11	3	17	79	109	7	3	29	3	11	61	3	137	3
85	19	3	.	3	.	7	.	.	3	17	3	173	41	3	47	3	7	.	13	11
386	.	.	29	67	3	23	3	.	.	3	.	3	47	101	11	7	3	.	3	.
87	3	11	3	7	83	3	.	3	137	7	17	13	3	.	3	79	.	3	11	3
88	.	3	7	3	.	11	.	47	3	.	3	17	59	3	37	3	.	19	97	7
89	11	.	163	.	3	47	3	7	.	3	.	3	17	7	13	127	3	.	3	59
90	3	7	3	139	11	3	7	3	89	41	23	.	3	11	3	.	13	3	.	3
391	7	3	.	3	.	.	53	13	3	43	3	7	.	3	149	3	.	7	19	.
92	.	17	37	11	3	7	3	107	173	3	7	3	11	163	17	101	3	.	3	13
93	3	23	3	.	7	3	.	3	.	.	13	53	3	.	3	7	11	3	.	3
94	.	3	11	3	.	19	61	29	3	7	3	11	13	3	7	3	17	73	127	.
95	.	37	7	13	3	.	3	.	7	3	19	3	.	23	31	11	3	17	3	7
396	3	19	3	.	17	3	.	3	.	97	11	.	3	7	3	13	19	3	7	3
97	127	3	83	3	.	17	7	.	3	31	3	.	7	3	11	3	.	13	17	.
98	7	11	.	23	3	.	3	.	13	3	.	3	19	.	.	113	3	7	3	17
99	3	.	3	31	89	3	17	3	.	71	7	.	3	.	3	.	7	3	23	3
400	11	3	41	3	7	.	103	17	3	11	3	13	149	3	.	3	47	.	101	.
401	.	.	13	7	3	.	3	.	17	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	61
02	3	.	3	127	13	3	67	3	7	17	.	47	3	.	3	.	43	3	59	3
03	.	3	.	3	.	181	37	7	3	47	3	149	11	3	.	3	13	31	7	71
04	19	7	23	.	3	43	3	11	.	3	17	3	7	.	.	19	3	.	3	.
05	3	107	3	.	47	3	113	3	29	13	.	7	3	.	3	37	.	3	.	3
406	13	3	109	3	73	7	11	67	3	89	3	19	17	3	23	3	7	.	.	.
07	.	83	53	.	3	.	3	59	.	3	11	3	13	17	.	7	3	19	3	11
08	3	.	3	7	29	3	.	3	23	7	41	.	3	.	3	31	103	3	.	3
09	31	3	7	3	.	13	71	53	3	.	3	43	107	3	17	3	179	.	11	7
10	.	61	.	19	3	11	3	7	67	3	.	3	.	7	181	17	3	13	3	73
411	3	7	3	79	.	3	7	3	13	11	.	.	3	.	3	.	17	3	13	3
12	7	3	.	3	11	.	29	.	3	149	3	7	.	3	19	3	157	7	61	.
13	.	13	.	59	3	7	3	41	11	3	7	3	.	29	.	.	3	11	3	.
14	3	.	3	11	7	3	.	3	113	67	19	.	3	13	3	7	.	3	17	3
15	37	3	29	3	13	89	197	11	3	7	3	.	43	3	7	3	11	.	.	17
416	.	23	7	.	3	61	3	.	7	3	71	3	.	73	.	47	3	173	3	7
17	3	43	3	.	.	3	11	3	.	37	.	41	3	7	3	11	23	3	7	3
18	.	3	19	3	41	.	7	149	3	13	3	.	7	3	.	3	163	.	.	11
19	7	.	.	.	3	29	3	.	19	3	13	3	.	.	11	199	3	7	3	.
20	3	11	3	137	.	3	23	.	.	.	7	29	3	.	3	.	7	3	11	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
.	71	13	17	3	23	3	7	71	3	103	3	.	7	29	.	3	17	3	113
3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	.	11	3	157	3	.	53	3	83	3
7	3	.	3	29	17	11	101	3	.	3	7	.	3	.	3	13	7	17	.
109	.	.	.	3	7	3	13	59	3	7	3	151	.	.	31	3	.	3	11
3	19	3	.	7	3	17	3	10	13	23	71	3	.	3	7	19	3	157	3
13	3	137	3	.	43	19	17	3	7	3	47	89	3	7	3	.	.	11	.
.	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	13	151	.	79	3	.	3	7
3	23	3	13	31	3	47	3	.	11	113	.	3	7	3	.	.	3	7	3
.	3	107	3	11	13	7	167	3	.	3	.	7	3	.	3	23	.	67	29
7	.	20	41	3	.	3	.	11	3	17	3	37	23	.	193	3	7	3	.
3	.	3	11	19	3	.	3	13	29	7	17	3	.	3	179	7	3	13	3
.	3	.	3	7	79	23	11	3	.	3	139	17	3	.	3	11	83	59	61
19	13	11	7	3	.	3	.	.	3	37	3	.	17	7	19	3	89	3	67
3	.	3	83	.	3	11	3	7	173	.	137	3	13	3	11	.	3	23	3
41	3	139	3	13	51	.	7	3	71	3	19	101	3	13	3	.	.	7	11
59	7	.	.	3	.	13	53	181	3	.	3	7	.	11	17	3	19	3	.
3	11	3	109	.	3	.	3	.	23	73	7	3	101	3	191	17	3	11	3
.	3	71	3	193	7	43	29	3	13	3	41	53	3	59	3	7	17	163	13
11	43	23	19	3	.	3	37	167	3	13	3	197	.	53	7	3	.	3	71
3	79	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	47	.	3	17	3
.	3	7	3	.	31	157	.	3	.	3	.	.	3	19	3	37	11	131	7
.	.	.	11	3	13	3	7	.	3	47	3	11	7	31	13	3	151	3	.
3	7	3	59	73	3	7	3	23	127	19	97	3	43	3	101	11	3	61	3
7	3	11	3	89	23	.	43	3	31	3	7	157	3	37	3	19	7	13	.
.	191	.	47	3	7	3	.	211	3	7	3	.	.	.	11	3	.	3	.
3	13	3	31	7	3	.	3	.	.	11	13	3	.	3	7	.	3	.	3
.	3	13	3	.	61	97	197	3	7	3	.	41	3	7	3	.	101	29	73
71	11	7	.	3	41	3	.	7	3	23	3	127	107	13	.	3	.	3	7
3	83	3	.	97	3	.	3	29	167	.	179	3	7	3	.	13	3	7	3
11	3	.	3	19	.	7	13	3	11	3	37	7	3	29	3	73	31	107	19
7	23	43	79	3	197	3	.	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	13
3	17	3	53	29	3	103	3	11	41	7	31	3	.	3	19	7	3	.	3
89	3	.	3	7	113	.	.	3	61	3	.	11	3	.	3	.	.	137	101
83	.	17	7	3	.	3	11	53	3	.	3	181	.	7	.	3	29	3	47
3	.	3	37	71	3	23	3	7	.	53	11	3	.	3	13	.	3	37	3
31	3	59	3	17	.	11	7	3	43	3	103	.	3	47	3	.	13	7	191
23	7	.	43	3	17	3	131	13	3	11	3	7	19	.	53	3	149	3	11
3	163	3	19	61	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	23	.	3	19	3
197	3	29	3	31	7	17	47	3	19	3	13	23	3	71	3	7	.	11	.
157	179	13	139	3	11	3	17	.	3	.	3	191	13	19	7	3	41	3	.
3	.	3	7	13	3	107	3	17	7	193	163	3	.	3	29	.	3	.	3
47	3	7	3	11	37	113	.	3	17	3	.	83	3	.	3	13	131	103	7
.	19	.	.	3	29	3	7	11	3	.	3	107	7	.	149	3	11	3	.
3	7	3	11	.	3	7	3	61	13	17	29	3	59	3	.	.	3	.	3
7	3	.	3	.	193	181	11	3	.	3	7	19	3	173	3	11	7	89	.
.	29	11	127	3	7	3	.	23	3	7	3	13	.	149	.	3	.	3	.
3	.	3	13	7	3	11	3	19	.	.	83	3	17	3	7	43	3	.	3
17	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	139	79	11
.	17	7	61	3	43	3	.	7	3	167	3	71	.	11	73	3	13	3	7
3	11	3	29	53	3	.	3	13	59	31	131	3	7	3	17	.	3	7	3
19	3	17	3	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	17	.	.	.
7	13	.	17	3	31	3	23	.	3	83	3	73	149	.	97	3	7	3	37
3	.	3	.	11	3	.	3	79	37	7	19	3	11	3	.	7	3	113	3
107	3	.	3	7	17	.	.	3	47	3	43	.	3	13	3	.	11	17	23
.	67	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	137	3	.	3	17
3	181	3	.	47	3	17	3	7	.	97	.	3	19	3	.	11	3	29	3
.	3	11	3	.	.	.	7	3	13	3	11	59	3	.	3	.	.	7	13
13	7	.	.	3	137	3	.	17	3	13	3	7	31	.	11	3	.	3	59
3	.	3	23	.	3	.	3	173	17	11	7	3	.	3	.	191	3	.	3
23	3	61	3	41	7	.	31	3	.	3	.	43	3	11	3	7	107	23	.

01 03 07 09 11 13 17 19 21 23 27 29 31 33 37 39 41 43 47 49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
421	61	3	.	3	7	11	149	.	3	181	3	.	.	3	.	3	31	.	.	19
22	11	29	.	7	3	13	3	43	41	3	67	3	.	.	7	13	3	.	3	.
23	3	41	3	.	11	3	13	3	7	.	31	.	3	11	3	19	.	3	.	3
24	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	107	23	3	.	3	.	11	7	.
25	17	7	.	11	3	31	3	.	.	3	.	3	7	97	37	.	3	191	3	41
426	3	13	3	29	37	3	.	3	71	139	.	7	3	.	3	.	11	3	.	3
27	.	3	11	3	61	7	.	19	3	.	3	11	179	3	.	3	7	.	.	127
28	73	.	17	.	3	.	3	163	43	3	53	3	137	19	13	7	3	59	3	.
29	3	.	3	7	.	3	.	3	97	7	11	.	3	53	3	.	13	3	19	3
30	.	3	7	3	17	.	.	13	3	19	3	23	67	3	11	3	41	.	71	7
431	.	11	103	.	3	17	3	7	23	3	.	3	29	7	19	.	3	47	3	13
32	3	7	3	181	.	3	7	3	.	109	13	113	3	.	3	73	.	3	29	3
33	7	3	191	3	131	103	17	31	3	11	3	7	13	3	43	3	.	7	.	.
34	.	19	.	13	3	7	3	17	29	3	7	3	.	11	.	157	3	23	3	.
35	3	97	3	43	7	3	19	3	11	.	.	.	3	41	3	7	.	3	.	3
436	.	3	149	3	.	47	13	.	3	7	3	31	11	3	7	3	.	13	37	89
37	67	.	7	.	3	107	3	11	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7
38	3	.	3	61	23	3	.	3	19	73	17	11	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	113	3	.	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	29	.	23
40	7	.	13	.	3	139	3	127	.	3	11	3	17	13	.	.	3	7	3	11
441	3	67	3	.	13	3	29	3	.	163	7	.	3	17	3	.	7	3	193	3
42	17	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	.	3	67	3	13	.	11	31
43	.	17	.	7	3	11	3	13	.	3	199	3	.	.	7	.	3	103	3	29
44	3	.	3	23	173	3	53	3	7	11	79	19	3	.	3	17	.	3	.	3
45	13	3	17	3	11	.	41	7	3	29	3	.	109	3	.	3	17	19	7	103
446	.	7	.	17	3	59	3	19	11	3	43	3	7	.	.	23	3	11	3	.
47	3	.	3	11	17	3	89	3	.	.	.	7	3	19	3	.	47	3	.	3
48	.	3	31	3	113	7	.	11	3	23	3	.	37	3	.	3	7	.	17	59
49	79	.	11	.	3	.	3	193	.	3	41	3	31	.	.	7	3	13	3	17
50	3	.	3	7	.	3	11	3	13	7	.	61	3	.	3	11	67	3	13	3
451	163	3	7	3	.	19	31	17	3	199	3	.	.	3	73	3	.	43	.	7
52	37	13	167	.	3	.	3	7	17	3	19	3	.	7	11	.	3	.	3	97
53	3	7	3	67	.	3	7	3	59	17	.	23	3	13	3	.	19	3	11	3
54	7	3	131	3	13	11	19	41	3	37	3	7	.	3	13	3	.	7	.	173
55	11	.	.	29	3	7	3	.	199	3	7	3	19	79	.	.	3	127	3	.
456	3	71	3	.	7	3	.	3	109	.	.	17	3	11	3	7	.	3	.	3
57	.	3	.	3	67	.	.	37	3	7	3	.	17	3	7	3	29	11	41	13
58	13	.	7	11	3	.	3	.	7	3	13	3	11	17	.	109	3	.	3	7
59	3	.	3	.	19	3	43	3	.	31	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3
60	.	3	11	3	.	73	7	23	3	.	3	11	7	3	17	3	.	.	31	.
461	7	.	101	31	3	13	3	137	.	3	61	3	.	.	.	11	3	7	3	.
62	3	23	3	167	.	3	13	3	.	.	7	.	3	31	3	41	7	3	67	3
63	.	3	151	3	7	71	199	89	3	79	3	19	.	3	11	3	23	17	13	.
64	.	11	.	7	3	97	3	31	.	3	.	3	53	23	7	.	3	19	3	.
65	3	13	3	.	101	3	.	3	7	.	47	13	3	37	3	.	.	3	17	3
466	11	3	13	.	29	.	23	7	3	11	3	.	.	3	.	3	.	53	7	17
67	.	7	.	19	3	101	3	.	.	3	29	3	7	11	13	71	3	73	3	53
68	3	.	3	47	.	3	.	3	11	19	.	7	3	173	3	.	13	3	23	3
69	29	3	.	.	151	7	67	13	3	107	3	109	11	3	19	3	7	.	.	43
70	.	211	.	.	3	19	3	11	103	3	179	3	23	197	.	7	3	.	3	13
471	3	61	3	7	.	3	101	3	43	7	13	11	3	29	3	.	41	3	109	3
72	.	3	7	3	167	151	11	.	3	41	3	.	13	3	.	3	19	.	.	7
73	.	.	23	13	3	.	3	7	127	3	11	3	.	7	.	.	3	83	3	11
74	3	7	3	.	31	3	7	3	37	29	197	79	3	103	3	13	.	3	.	3
75	7	3	19	3	199	.	13	.	3	113	3	7	.	3	23	3	.	7	11	.
476	17	.	.	.	3	7	3	73	13	3	7	3	.	41	43	103	3	37	3	.
77	3	17	3	163	7	3	37	3	23	11	.	.	3	71	3	7	.	3	.	3
78	109	3	.	3	11	23	151	.	3	7	3	13	.	3	7	3	83	47	211	19
79	.	79	7	199	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	47	37	3	11	3	7
80	3	29	3	11	13	3	71	3	53	.	131	.	3	7	3	19	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
103	11	73	.	3	13	3	.	.	3	17	3	.	127	37	7	3	31	3	89
3	19	3	7	37	3	13	3	.	7	29	17	3	139	3	.	19	3	.	3
11	3	7	3	.	.	19	211	3	11	3	31	17	3	.	3	.	29	13	7
29	97	.	.	3	.	3	7	41	3	79	3	19	7	.	59	3	193	3	.
3	7	3	179	139	3	7	3	11	.	.	13	3	.	3	.	.	3	43	3
7	3	13	3	.	173	61	.	3	.	3	7	11	3	17	3	127	7	.	.
31	113	53	67	3	7	3	11	83	3	7	3	.	.	13	17	3	79	3	29
3	37	3	.	7	3	.	3	.	.	157	11	3	47	3	7	13	3	.	3
79	3	.	3	59	41	11	13	3	7	3	113	167	3	7	3	109	17	.	31
19	.	7	.	3	23	3	.	7	3	11	3	.	.	.	19	3	.	3	7
3	.	3	.	67	3	.	3	.	.	13	73	3	7	3	.	157	3	7	3
.	3	.	3	.	29	7	83	3	.	3	19	7	3	53	3	41	23	11	17
7	47	.	13	3	11	3	149	31	3	107	3	.	.	103	.	3	7	3	61
3	127	3	.	.	3	.	3	73	11	7	.	3	.	3	13	7	3	197	3
59	3	31	3	7	67	13	23	3	.	3	.	.	3	.	3	107	13	.	.
193	.	113	7	3	.	3	29	11	3	.	3	31	.	7	.	3	11	3	131
3	23	3	11	.	3	83	3	7	19	.	223	3	41	3	.	.	3	.	3
.	3	.	3	.	109	31	7	3	.	3	13	.	3	19	3	11	.	7	79
139	7	11	29	3	19	3	.	.	3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	199
3	31	3	43	13	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	163	3	.	3
.	3	89	3	.	7	23	.	3	.	3	.	.	3	181	3	7	41	.	11
17	61	.	23	3	149	3	13	.	3	.	3	.	191	11	7	3	47	3	109
3	11	3	7	.	3	67	3	.	7	59	.	3	.	3	71	.	3	11	3
13	3	7	3	.	11	.	127	3	.	3	211	29	3	31	3	.	73	61	7
11	.	17	53	3	.	3	7	19	3	.	3	13	7	97	.	3	.	3	.
3	7	3	13	11	3	7	3	223	23	.	197	3	11	3	79	89	3	.	3
7	3	.	3	17	13	41	67	3	.	3	7	97	3	113	3	.	7	31	19
37	101	23	11	3	7	3	89	.	3	7	3	11	.	29	.	3	13	3	.
3	109	3	.	7	3	59	3	13	.	127	.	3	31	3	7	11	3	13	3
.	3	11	3	29	139	17	163	3	7	3	11	.	3	7	3	43	.	.	71
137	13	7	.	3	79	3	17	7	3	29	3	.	.	.	11	3	199	3	7
3	.	3	41	83	3	.	3	17	181	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3
29	3	.	3	13	23	7	19	3	17	3	.	7	3	11	3	.	.	.	.
7	11	.	101	3	.	3	.	.	3	.	3	.	19	.	.	3	7	3	.
3	.	3	19	.	3	.	3	.	67	7	227	3	29	3	.	7	3	19	3
11	3	.	3	7	.	71	41	3	11	3	17	.	3	.	3	113	43	.	13
13	149	29	7	3	.	3	.	.	3	13	3	17	11	7	31	3	59	3	.
3	.	3	103	197	3	.	3	7	29	.	.	3	17	3	.	47	3	139	3
17	3	.	3	23	.	193	7	3	137	3	.	11	3	167	3	.	127	7	.
149	7	131	.	3	13	3	11	.	3	.	3	7	61	17	13	3	71	3	23
3	.	3	107	31	3	13	3	.	47	.	7	3	37	3	17	23	3	.	3
.	3	17	3	109	7	11	79	3	.	3	29	19	3	.	3	7	89	13	.
.	193	19	17	3	.	3	113	.	3	11	3	43	59	199	7	3	17	3	11
3	13	3	7	17	3	23	3	19	7	103	13	3	.	3	41	229	3	179	3
.	3	7	3	.	17	.	29	3	53	3	.	131	3	107	3	.	.	11	7
23	41	31	.	3	11	3	7	101	3	.	3	.	7	13	.	3	61	3	17
3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	67	3	.	3	23	13	3	.	3
7	3	.	3	11	.	.	13	3	101	3	7	23	3	.	3	53	7	43	41
.	.	191	157	3	7	3	.	11	3	7	3	41	43	.	167	3	11	3	13
3	.	3	11	7	3	.	3	37	17	13	19	3	181	3	7	29	3	.	3
.	3	23	3	173	.	.	11	3	7	3	.	13	3	7	3	11	19	.	.
.	83	7	13	3	127	3	19	7	3	17	3	.	.	139	.	3	37	3	7
3	151	3	.	89	3	11	3	71	.	.	17	3	7	3	11	41	3	7	3
.	3	.	3	.	31	7	.	3	41	3	23	7	3	.	3	.	13	19	11
7	.	.	73	3	59	3	109	13	3	.	3	199	17	11	37	3	7	3	.
3	11	3	.	.	3	.	3	29	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
83	3	43	3	7	11	.	.	3	31	3	13	.	3	17	3	61	223	71	59
11	173	13	7	3	.	3	.	107	3	19	3	.	13	7	17	3	23	3	.
3	19	3	31	11	3	.	3	7	.	.	199	3	11	3	.	17	3	73	3
.	3	53	3	.	.	19	7	3	89	3	97	71	3	.	3	13	11	7	.
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
481	179	3	·	3	17	·	7	11	3	67	3	·	7	3	·	3	11	·	·	157
82	7	73	11	·	3	17	3	13	·	3	23	3	·	53	109	43	3	7	3	·
83	3	·	3	37	137	3	11	3	·	13	7	101	3	·	3	11	7	3	·	3
84	13	3	37	3	7	·	17	19	3	·	3	·		3	·	3	·	71	·	11
85	47	23	59	7	3	·	3	17	·	3	31	3	13	19	7	·	3	·	3	23
486	3	11	3	13	·	3	41	3	7	·	·	·	3	89	3	181	23	3	11	3
87	·	3	·	3	·	11	·	7	3	17	3	·	·	3	·	3	97	59	7	·
88	11	7	·	·	3	131	3	·	·	3	37	3	7	·	19	·	3	13	3	107
89	3	·	3	173	11	3	23	3	13	·	17	7	3	11	3	·	·	3	13	3
90	181	3	·	3	71	7	139	·	3	31	3	17	·	3	191	3	7	11	29	37
491	23	13	·	11	3	211	3	·	·	3	·	3	11	137	101	7	3	·	3	·
92	3	·	3	7	·	3	19	3	29	7	·	·	3	13	3	23	11	3	·	3
93	17	3	7	3	13	·	·	·	3	97	3	11	19	3	13	3	·	·	47	7
94	·	17	19	·	3	·	3	7	61	3	·	3	·	7	17	11	3	43	3	·
95	3	7	3	·	29	3	7	3	19	89	11	43	3	179	3	17	101	3	·	3
496	7	3	17	3	53	·	·	·	3	13	3	7	·	3	11	3	17	7	·	13
97	13	11	·	17	3	7	3	157	71	3	7	3	67	·	·	·	3	17	3	19
98	3	·	3	73	7	3	47	3	·	53	·	31	3	83	3	7	·	3	41	3
99	11	3	·	3	47	17	29	107	3	7	3	23	151	3	7	3	·	·	17	·
500	·	·	7	113	3	13	3	·	7	3	·	3	61	11	·	13	3	·	3	7
501	3	·	3	·	103	3	13	3	11	131	·	19	3	7	3	31	53	3	7	3
02	31	3	29	3	·	·	7	17	3	·	3	137	7	3	·	3	·	19	13	179
03	7	43	37	·	3	·	3	11	17	3	·	3	83	·	·	41	3	7	3	101
04	3	13	3	·	·	3	109	3	41	17	7	11	3	19	3	29	7	3	·	3
05	·	3	13	3	7	59	11	61	3	103	3	37	·	3	·	3	·	·	19	·
506	·	37	179	7	3	29	3	23	·	3	11	3	59	·	7	173	3	103	3	11
07	3	·	3	193	23	3	·	3	7	·	·	17	3	43	3	·	13	3	79	3
08	211	3	·	3	181	19	·	7	3	·	3	83	17	3	151	3	·	·	7	23
09	·	7	·	131	3	11	3	·	·	3	19	3	7	17	67	·	3	·	3	13
10	3	19	3	·	·	3	223	3	·	11	13	7	3	23	3	47	19	3	137	3
511	·	3	·	3	11	7	19	·	3	73	3	61	13	3	17	3	7	·	·	·
12	53	107	·	13	3	·	3	167	11	3	47	3	19	·	·	7	3	11	3	43
13	3	89	3	7	·	3	31	3	47	7	83	191	3	·	3	13	17	3	103	3
14	23	3	7	3	·	53	13	11	3	·	3	·	·	3	·	3	11	13	23	7
15	·	31	11	47	3	·	3	7	13	3	·	3	·	7	79	23	3	·	3	·
516	3	7	3	·	19	3	7	3	163	·	31	·	3	·	3	11	·	3	17	3
17	7	3	73	3	191	37	[illegible]	·	3	23	3	7	53	3	·	3	67	7	·	11
18	19	·	13	·	3	7	3	·	·	3	7	3	29	13	11	19	3	·	3	·
19	3	11	3	223	7	3	157	3	·	·	·	59	3	227	3	7	·	3	11	3
20	·	3	·	3	79	11	·	·	3	7	3	19	·	3	7	3	13	113	59	53
521	11	·	7	43	3	·	3	13	7	3	·	3	·	·	23	·	3	19	3	7
22	3	·	3	·	11	3	·	3	167	13	61	23	3	7	3	·	·	3	7	3
23	13	3	41	3	·	·	7	·	3	83	3	·	7	3	·	3	·	11	151	61
24	7	·	·	11	3	23	3	71	137	3	97	3	11	31	73	·	3	7	3	47
25	3	·	3	13	·	3	·	3	·	19	7	·	3	·	3	43	7	3	149	3
526	37	3	11	3	7	13	·	31	3	·	3	11	139	3	19	3	·	23	·	151
27	17	71	·	7	3	19	3	·	113	3	89	3	47	·	7	11	3	13	3	37
28	3	17	3	·	·	3	29	3	7	37	11	·	3	·	3	·	227	3	13	3
29	·	3	·	3	211	·	·	7	3	·	3	31	·	3	11	3	19	197	7	·
30	·	7	17	97	3	47	3	·	73	3	·	3	7	109	·	·	3	·	3	29
531	3	23	3	17	·	3	79	3	·	·	41	7	3	13	3	·	43	3	·	3
32	11	3	19	3	13	7	·	·	3	11	3	·	·	3	13	3	7	137	223	·
33	31	·	239	·	3	17	3	83	19	3	·	3	·	11	197	7	3	107	3	67
34	3	·	3	7	193	3	127	3	11	7	53	·	3	79	3	89	149	3	61	3
35	·	3	7	3	19	29	17	·	3	13	3	131	11	3	41	3	·	·	·	7
536	13	·	·	23	3	103	3	7	191	3	13	3	·	7	37	53	3	·	3	·
37	3	7	3	·	37	3	7	3	17	·	·	11	3	·	3	19	·	3	23	3
38	7	3	·	3	·	61	11	103	3	17	3	7	·	3	·	3	·	7	·	·
39	·	163	79	·	3	7	3	29	31	3	7	3	23	37	·	13	3	·	3	11
40	3	191	3	·	7	3	13	3	139	23	17	41	3	·	3	7	·	3	47	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
·	7	61	11	3	53	3	13	·	3	113	3	7	·	43	·	3	29	3	173
3	67	3	151	23	3	·	3	59	13	211	7	3	193	3	73	11	3	17	3
13	3	11	3	·	7	29	·	3	·	3	11	·	3	67	3	7	31	·	17
·	·	41	·	3	·	3	·	·	3	37	3	13	29	·	7	3	·	3	·
3	·	3	7	19	3	·	3	·	7	11	31	3	23	3	·	·	3	·	3
·	3	7	3	97	13	·	193	3	·	3	·	·	3	11	3	101	53	·	7
19	11	227	·	3	·	3	7	·	3	·	3	229	7	127	19	3	13	3	53
3	7	3	23	59	3	7	3	13	73	109	·	3	·	3	29	173	3	13	3
7	3	·	3	43	89	·	·	3	11	3	7	163	3	137	3	·	7	23	·
·	13	67	·	3	7	3	37	·	3	7	3	113	11	47	23	3	19	3	·
3	·	3	·	7	3	·	3	11	199	·	29	3	13	3	7	67	3	·	3
·	3	·	3	13	·	·	·	3	7	3	·	11	3	7	3	37	·	101	·
17	29	7	19	3	·	3	11	7	3	61	3	·	·	·	·	3	·	3	7
3	17	3	67	·	3	151	3	157	19	43	11	3	7	3	·	·	3	7	3
·	3	47	3	·	43	7	59	3	13	3	·	7	3	19	3	·	67	·	13
7	·	17	·	3	19	3	·	·	3	11	3	·	·	23	·	3	7	3	11
3	53	3	17	·	3	·	3	·	103	7	23	3	·	3	139	7	3	107	3
41	3	·	3	7	·	·	·	3	·	3	·	31	3	·	3	19	·	11	·
·	·	37	7	3	11	3	199	·	3	·	3	·	·	7	13	3	43	3	·
3	·	3	·	79	3	13	3	7	11	179	43	3	137	3	·	·	3	41	3
·	3	19	3	11	·	17	7	3	·	3	37	·	3	73	3	31	23	7	·
43	7	·	·	3	67	3	17	11	3	59	3	7	53	·	·	3	11	3	·
3	13	3	11	·	3	199	3	17	151	23	7	3	·	3	53	103	3	29	3
·	3	13	3	19	7	·	11	3	17	3	73	·	3	·	3	7	·	47	19
·	·	11	·	3	31	3	·	29	3	·	3	·	·	13	7	3	·	3	193
3	23	3	7	·	3	11	3	41	7	17	·	3	·	3	11	13	3	37	3
·	3	7	3	·	·	43	13	3	131	3	17	·	3	·	3	23	179	·	7
79	43	·	·	3	·	3	7	·	3	·	3	17	7	11	113	3	·	3	13
3	7	3	·	·	3	7	3	·	·	13	·	3	17	3	97	·	3	11	3
7	3	109	3	47	11	23	19	3	127	3	7	13	3	·	3	·	7	·	89
11	17	·	13	3	7	3	·	239	3	7	3	·	19	17	·	3	·	3	·
3	·	3	19	7	3	29	3	·	·	89	151	3	11	3	7	·	3	19	3
·	3	17	3	223	37	13	31	3	7	3	·	·	3	7	3	17	11	·	·
61	137	7	11	3	·	3	67	7	3	·	3	11	79	19	71	3	17	3	7
3	·	3	131	17	3	113	3	97	23	·	·	3	7	3	163	11	3	7	3
·	3	11	3	53	17	7	157	3	29	3	11	7	3	·	3	·	59	17	·
7	19	13	·	3	·	3	·	197	3	·	3	·	13	·	11	3	7	3	17
3	·	3	·	13	3	17	3	67	53	7	·	3	151	3	·	7	3	·	3
·	3	79	3	7	29	·	17	3	·	3	53	19	3	11	3	13	·	·	167
31	11	19	7	3	·	3	13	17	3	·	3	·	131	7	127	3	·	3	·
3	97	3	·	·	3	89	3	7	13	37	·	3	61	3	47	53	3	·	3
11	3	·	3	·	23	·	7	3	11	3	·	·	3	·	3	139	·	7	31
173	7	199	·	3	·	3	29	·	3	17	3	7	11	·	227	3	41	3	19
3	·	3	13	·	3	·	3	11	37	·	7	3	71	3	·	·	3	211	3
19	3	41	3	·	7	163	139	3	43	3	107	11	9	·	3	7	·	127	·
·	·	103	29	3	·	3	11	31	3	23	3	·	17	191	7	3	13	3	223
3	47	3	7	·	3	71	3	13	7	·	11	3	·	3	151	·	3	13	3
127	3	7	3	23	103	11	131	3	59	3	89	·	3	17	3	29	19	83	7
·	13	·	·	3	·	3	7	·	3	11	3	31	9	·	17	3	·	3	11
3	7	3	·	·	3	7	3	·	·	67	·	3	13	3	43	17	3	137	3
7	3	·	3	13	·	31	·	3	·	3	7	29	3	13	3	·	7	11	·
53	73	·	·	3	7	3	·	·	3	7	3	61	·	37	·	3	·	3	179
3	31	3	127	7	3	23	3	137	11	41	79	3	·	3	7	·	3	17	3
191	3	·	3	11	19	·	·	3	7	3	67	103	3	7	3	·	·	·	13
13	157	7	·	3	·	3	53	7	3	13	3	59	37	29	·	3	11	3	7
3	19	3	11	·	3	·	3	·	109	·	·	3	7	3	23	19	3	7	3
227	3	·	3	29	211	7	11	3	·	3	·	7	3	31	3	11	·	·	149
7	79	11	·	3	13	3	41	163	3	29	3	19	·	53	13	3	7	3	97
3	37	3	139	181	3	11	3	·	31	7	·	3	73	3	11	7	3	151	3
29	3	23	3	7	·	·	47	3	193	3	·	173	3	·	3	·	97	13	11
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
541	.	3	31	3	41	.	.	19	3	7	3	17	.	3	7	3	47	.	11	83
42	.	227	7	29	3	11	3	.	7	3	.	3	17	19	.	233	3	.	3	7
43	3	13	3	19	.	3	.	3	.	11	.	13	3	7	3	137	109	3	7	3
44	17	3	13	3	11	107	7	.	3	19	3	157	7	3	23	3	29	.	.	.
45	7	17	89	.	3	.	3	197	11	3	.	3	.	.	13	79	3	7	3	71
546	3	31	3	11	47	3	.	3	23	.	7	.	3	149	3	17	7	3	83	3
47	.	3	17	3	7	23	.	11	3	.	3	.	29	3	.	3	11	157	37	.
48	.	19	11	7	3	83	3	.	37	3	.	3	.	71	7	131	3	17	3	13
49	3	179	3	.	17	3	11	3	7	.	13	.	3	.	3	11	127	3	43	3
50	.	3	.	3	.	17	53	7	3	.	3	.	13	3	31	3	89	37	7	11
551	131	7	19	13	3	.	3	43	.	3	23	3	7	139	11	229	3	97	3	17
52	3	11	3	.	73	3	17	3	19	31	167	7	3	59	3	13	.	3	11	3
53	.	3	197	3	23	7	13	17	3	.	3	79	.	3	97	3	7	13	31	.
54	11	23	.	31	3	37	3	.	13	3	29	3	109	113	.	7	3	211	3	19
55	3	73	3	7	11	3	181	3	61	7	149	.	3	11	3	.	23	3	53	3
556	19	3	7	3	.	.	.	179	3	.	3	13	.	3	233	3	.	11	.	7
57	197	127	13	11	3	.	3	7	43	3	17	3	11	7	.	47	3	.	3	.
58	3	7	3	83	13	3	7	3	.	59	71	17	3	29	3	.	11	3	.	3
59	7	3	11	3	107	191	.	97	3	223	3	7	17	3	.	3	13	7	.	29
60	23	.	29	61	3	7	3	13	47	3	7	3	.	17	.	11	3	.	3	.
561	3	233	3	89	7	3	.	3	.	13	11	.	3	19	3	7	83	3	.	3
62	13	3	101	3	127	.	.	.	3	7	3	167	23	7	7	3	181	41	19	.
63	37	11	7	.	3	157	3	.	7	3	.	3	13	.	113	17	3	.	3	7
64	3	.	3	13	131	3	.	3	149	.	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3
65	11	3	23	3	163	13	7	.	3	11	3	29	7	3	71	3	.	17	.	.
566	7	181	53	.	3	.	3	61	.	3	19	3	.	11	.	83	3	7	3	31
67	3	19	3	211	31	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	109	7	3	13	3
68	139	3	.	3	7	101	19	29	3	.	3	23	11	3	163	3	.	.	.	17
69	.	13	.	7	3	.	3	11	23	3	227	3	19	.	7	.	3	.	3	.
70	3	59	3	.	43	3	149	3	7	.	.	11	3	19	3	.	37	3	.	3
571	67	3	61	3	13	.	11	7	3	.	3	.	211	3	13	3	.	.	7	47
72	.	7	31	.	3	173	3	.	.	3	11	3	7	.	.	59	3	23	3	11
73	3	83	3	41	19	3	.	3	103	.	181	7	3	.	3	.	29	3	.	3
74	73	3	.	3	37	7	.	101	3	13	3	229	47	3	.	3	7	.	11	13
75	13	67	.	.	3	11	3	23	.	3	13	3	71	89	.	7	3	.	3	219
576	3	.	3	7	23	3	.	3	101	7	137	.	3	37	3	.	31	3	.	3
77	.	3	7	3	11	47	61	41	3	.	3	19	.	3	.	3	.	.	29	7
78	17	.	47	.	3	13	3	7	11	3	31	3	.	7	197	13	3	11	3	.
79	3	7	3	11	149	3	7	3	29	.	.	37	3	23	3	103	.	3	59	3
80	7	3	.	3	.	31	.	11	3	.	3	7	241	3	29	3	11	7	13	.
581	.	.	11	19	3	7	3	.	.	3	7	3	73	83	31	.	3	.	3	.
82	3	13	3	17	7	3	11	3	.	19	101	13	3	167	3	7	71	3	97	3
83	23	3	13	3	17	.	.	.	3	7	3	.	79	3	7	3	.	.	23	11
84	.	.	7	53	3	17	3	59	7	3	.	3	.	233	11	23	3	29	3	7
85	3	11	3	31	157	3	.	3	37	.	19	.	3	7	3	41	13	3	7	3
586	89	3	.	3	.	11	7	13	3	23	3	.	7	3	.	3	19	.	79	.
87	7	41	.	67	3	.	3	17	.	3	53	3	43	29	.	.	3	7	3	13
88	3	229	3	71	11	3	37	3	17	113	7	97	3	11	3	.	7	3	.	3
89	167	3	19	3	7	.	.	109	3	17	3	.	13	3	61	3	.	11	.	41
90	.	.	73	7	3	.	3	.	19	3	.	3	11	.	7	37	3	.	3	113
591	3	149	3	.	67	3	.	3	7	47	17	23	3	.	3	13	11	3	.	3
92	193	3	11	3	19	.	13	7	3	.	3	11	.	3	101	3	211	13	7	19
93	.	7	.	.	3	23	3	.	13	3	.	3	7	43	.	11	3	.	3	.
94	3	.	3	37	97	3	.	3	.	.	11	7	3	17	3	19	41	3	.	3
95	17	3	.	3	.	7	.	71	3	41	3	13	.	3	11	3	7	23	61	107
596	.	11	13	.	3	.	3	.	.	3	83	3	37	13	17	7	3	.	3	.
97	3	.	3	7	13	3	59	3	.	7	23	.	3	191	3	17	.	3	.	3
98	11	3	7	3	31	.	131	19	3	11	3	.	233	3	.	3	13	101	89	7
99	.	167	.	17	3	61	3	7	.	3	37	3	.	7	223	239	3	17	3	.
600	3	7	3	19	17	3	7	3	11	13	.	73	3	.	3	.	.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
.	.	.	7	3	47	3	79	59	3	.	3	157	.	7	.	3	137	3	.
3	11	3	.	19	3	.	3	7	.	229	13	3	29	3	59	107	3	11	3
47	3	13	3	41	11	.	7	3	179	3	23	.	3	.	3	83	.	7	29
11	7	29	193	3	.	3	31	23	3	.	3	7	223	13	19	3	.	3	.
3	17	3	.	11	3	7	3	.	29	.	7	3	11	3		13	3	191	3
.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	19	.	3	.	3	7	11	.	.
101	.	17	11	3	109	3	.	41	3	.	3	11	.	.	7	3	19	3	13
3	41	3	7	.	3	61	3	.	7	13	59	3	127	3	83	11	3	71	3
.	3	7	3	17	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	149	.	59	7
.	53	.	13	3	17	3	7	139	3	.	3	.	7	67	11	3	.	3	41
3	7	3	53	23	3	7	3	.	19	11	.	3	113	3	13	.	3	47	3
7	3	97	3	.	41	13	29	3	.	3	7	.	3	11	3	47	7	73	23
59	11	101	37	3	7	3	17	13	3	7	3	.	.	83	.	3	.	3	31
3	.	3	.	7	3	.	3	17	239	19	47	3	23	3	7	.	3	43	3
11	3	.	3	.	137	227	.	3	7	3	13	37	3	7	3	19	.	.	61
229	.	7	.	3	.	3	43	7	3	.	3	.	11	.	53	3	.	3	7
3	.	3	23	13	3	.	3	11	.	17	.	3	7	3	107	29	3	7	3
23	3	19	3	113	.	7	.	3	211	3	17	7	3	.	3	13	.	23	127
7	103	31	.	3	101	3	11	19	3	.	3	17	.	241	23	3	7	3	.
3	.	3	59	.	3	.	3	109	13	7	11	3	17	3	.	7	3	.	3
13	3	173	3	7	179	11	.	3	23	3	.	.	3	.	3	.	.	29	19
.	17	.	7	3	.	3	.	43	3	11	3	13	.	7	109	3	67	3	11
3	.	3	13	.	3	101	3	7	.	.	157	3	83	3	17	31	3	.	3
.	3	17	3	139	13	.	7	3	.	3	163	149	3	29	3	17	41	7	197
.	7	.	17	3	11	3	101	103	3	31	3	7	.	23	.	3	13	3	.
3	.	3	137	17	3	.	3	13	11	.	7	3	.	3	.	37	3	13	3
.	3	73	3	11	7	59	19	3	.	3	149	.	3	43	3	7	.	17	131
.	13	181	107	3	23	3	.	11	3	.	3	83	19	31	7	3	11	3	17
3	.	3	7	53	3	17	3	.	7	.	.	3	13	3	.	113	3	19	3
251	3	7	3	13	61	29	11	3	19	3	.	.	3	13	3	11	23	67	7
89	.	11	223	3	.	3	7	17	3	.	3	.	7	19	103	3	233	3	.
3	7	3	31	.	3	7	3	191	17	23	53	3	37	3	11	.	3	.	3
7	3	29	3	.	.	.	23	3	13	3	7	.	3	.	3	97	7	.	11
13	19	163	.	3	7	3	.	.	3	7	3	137	229	11	.	3	.	3	67
3	11	3	41	7	3	19	3	.	139	.	17	3	.	3	7	.	3	11	3
.	3	.	3	.	11	.	113	3	7	3	.	17	3	7	3	23	31	.	.
11	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	101	17	.	13	3	.	3	7
3	.	3	.	11	3	13	3	19	.	83	29	3	7	3	.	.	3	7	3
.	3	.	3	79	.	7	41	3	97	3	.	7	3	17	3	43	11	13	.
7	29	.	11	3	.	3	.	73	3	43	3	11	.	.	17	3	7	3	19
3	13	3	.	61	3	97	3	37	.	7	13	3	59	3	31	7	3	23	3
19	3	11	3	7	157	.	[illegible]	3	.	3	11	.	3	.	3	227	17	41	47
.	.	107	7	3	73	3	.	131	3	.	3	23	.	7	11	3	37	3	229
3	.	3	29	41	3	37	3	7	23	11	19	3	.	3	.	13	3	17	3
53	3	251	3	31	.	149	7	3	113	3	173	47	3	11	3	233	19	7	17
.	7	23	.	3	.	3	19	.	3	.	3	7	.	109	37	3	127	3	13
3	89	3	.	163	3	.	3	61	59	13	7	3	19	3	41	101	3	.	3
11	3	229	3	.	7	.	53	3	11	3	241	13	3	23	3	7	61	19	.
.	41	47	13	3	139	3	.	.	3	.	3	29	11	.	7	3	101	3	107
3	.	3	7	.	3	79	3	11	7	.	.	3	.	3	13	193	3	29	3
.	3	7	3	.	19	13	.	3	.	3	.	11	3	53	3	.	13	.	7
113	.	197	61	3	.	3	7	13	3	19	3	37	7	89	.	3	53	3	71
3	7	3	.	241	3	7	3	83	.	.	11	3	79	3	223	19	3	101	3
7	3	.	3	149	.	11	.	3	.	3	7	59	3	.	3	31	7	.	.
17	31	13	109	3	7	3	.	.	3	7	3	19	13	.	.	3	.	3	11
3	17	3	.	7	3	.	3	211	137	29	.	3	.	3	7	41	3	.	3
.	3	.	3	23	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	13	29	11	37
29	23	7	.	3	11	3	13	7	3	.	3	.	43	.	.	3	.	3	7
3	59	3	17	19	3	29	3	.	11	.	.	3	7	3	233	23	3	7	3
13	3	149	3	11	251	7	[illegible]	3	103	3	.	7	3	.	3	.	211	.	257
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
601	7	3	43	3	·	17	·	·	3	19	3	7	11	3	139	3	23	7	17	37
02	·	89	·	·	3	7	3	11	·	3	7	3	13	23	19	·	3	·	3	17
03	3	·	3	13	7	3	17	3	73	·	173	11	3	·	3	7	131	3	·	·
04	61	3	·	3	103	13	11	17	3	7	3	197	31	3	7	3	241	·	·	101
05	151	19	7	23	3	71	3	37	7	3	11	3	29	47	43	·	3	13	3	7
606	3	131	3	·	·	3	19	3	13	17	47	·	3	7	3	·	137	3	7	·
07	79	3	·	3	·	·	7	67	3	·	3	·	7	3	89	3	31	·	11	163
08	7	13	19	·	3	11	3	·	29	3	17	3	23	107	·	·	3	7	3	·
09	3	·	3	47	·	3	41	3	19	11	7	17	3	13	3	71	7	3	181	·
10	·	3	·	3	7	227	79	173	3	157	3	103	17	3	13	3	·	199	107	·
611	·	·	23	7	3	31	3	·	11	3	131	3	193	17	7	43	3	11	3	19
12	3	·	3	11	·	3	197	3	7	71	29	233	3	·	3	167	·	3	·	·
13	19	3	·	3	43	·	109	7	3	13	3	·	·	3	17	3	11	29	7	13
14	13	7	11	41	3	·	3	·	·	3	13	3	7	·	·	17	3	·	3	89
15	3	·	3	·	·	3	11	3	23	67	139	7	3	·	3	11	17	3	31	3
616	·	3	·	3	197	7	·	83	3	·	3	37	·	3	·	3	7	17	103	11
17	·	37	·	151	3	13	3	19	223	3	163	3	·	31	11	7	3	61	3	29
18	3	11	3	7	·	3	13	3	·	7	43	·	3	19	3	199	59	3	11	3
19	41	3	7	3	·	11	·	31	3	29	3	·	·	3	·	3	·	47	13	7
20	11	·	·	229	3	53	3	7	·	3	23	3	·	7	47	29	3	31	3	·
621	3	7	3	61	11	3	7	3	·	79	97	13	3	11	3	·	·	3	37	3
22	7	3	13	3	23	19	71	73	3	·	3	7	61	3	199	3	167	7	·	·
23	·	23	127	11	3	7	3	47	97	3	7	3	11	·	13	89	3	43	3	23
24	3	19	3	·	7	3	·	3	179	·	·	43	3	·	3	7	11	3	·	3
25	71	3	11	3	73	·	19	13	3	7	3	11	·	3	7	3	·	53	·	59
626	31	·	7	·	3	223	3	29	7	3	233	3	19	·	·	11	3	71	3	7
27	3	·	3	97	·	3	23	3	41	·	11	67	3	7	3	37	·	3	7	3
28	·	3	239	3	·	37	7	·	3	·	3	227	7	3	11	3	61	109	·	31
29	7	11	157	13	3	79	3	·	·	3	71	3	·	·	·	·	3	7	3	73
30	3	17	3	·	19	3	·	3	59	·	7	·	3	199	3	13	7	3	·	3
631	11	3	137	3	7	83	13	181	3	11	3	·	23	3	179	3	29	13	·	·
32	19	43	17	7	3	41	3	151	13	3	·	3	·	11	7	19	3	167	3	·
33	3	·	3	17	·	3	·	3	7	127	·	61	3	241	3	·	·	3	·	3
34	107	3	23	3	17	·	·	7	3	·	3	13	11	3	·	3	173	·	7	·
35	103	7	13	·	3	17	3	11	151	3	·	3	7	13	·	·	3	19	3	·
636	3	53	3	·	13	3	·	3	·	41	57	7	3	43	3	·	·	3	·	3
37	37	3	103	3	·	7	11	43	3	·	3	23	·	3	227	3	7	·	131	·
38	67	·	·	19	3	·	3	13	23	3	11	3	127	193	29	7	3	181	3	11
39	3	31	3	7	167	3	47	3	17	7	·	137	3	109	3	61	89	3	·	3
40	13	3	7	3	29	·	·	79	3	17	3	139	·	3	19	3	·	107	11	7
641	·	·	·	83	3	11	3	7	·	3	29	3	13	7	·	·	3	23	3	43
42	3	7	3	13	179	3	7	3	·	11	17	·	3	·	3	53	239	3	113	3
43	7	3	139	3	11	13	191	59	3	·	3	7	·	3	31	3	19	7	71	·
44	·	·	43	73	3	7	3	23	11	3	7	3	17	·	59	·	3	11	3	·
45	3	·	3	11	7	3	·	3	13	31	·	·	3	17	3	7	·	3	13	3
646	17	3	19	3	·	·	·	11	3	7	3	·	71	3	7	3	11	·	31	23
47	73	13	7	31	3	·	3	239	7	3	211	3	·	·	17	67	3	·	3	7
48	3	·	3	79	37	3	11	3	·	29	·	·	3	7	3	11	·	3	7	3
49	·	3	17	3	13	167	7	·	3	43	3	181	7	3	13	3	17	103	·	11
50	7	·	67	17	3	·	3	31	·	3	59	3	151	37	11	·	3	7	3	·
651	3	11	3	23	17	3	·	3	·	·	7	·	3	·	3	19	7	3	11	3
52	23	3	·	3	7	11	·	·	3	13	3	29	97	3	·	3	109	·	17	13
53	11	·	·	7	3	163	3	131	·	3	13	3	·	151	7	23	3	·	3	17
54	3	29	3	67	11	3	17	3	7	233	41	·	3	11	3	43	79	3	·	3
55	·	3	·	3	53	·	173	7	3	23	3	·	·	3	·	3	107	11	7	·
656	·	7	·	11	3	13	3	97	17	3	·	3	7	19	·	13	3	179	3	·
57	3	47	3	19	·	3	13	3	89	17	·	7	3	157	3	·	11	3	19	3
58	·	3	11	3	67	7	·	199	3	19	3	11	·	3	41	3	7	131	13	·
59	·	101	·	71	3	·	3	41	37	3	17	3	·	·	19	7	3	·	3	31
60	3	13	3	7	31	3	·	3	·	7	11	13	3	·	3	·	29	3	157	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
661	7	.	.	.	3	17	3	37	11	3	89	3	13	41	.	19	3	7	3	29
62	3	239	3	11	73	3	23	3	.	47	7	103	3	107	3	.	7	3	31	3
63	.	3	61	3	7	13	17	11	3	29	3	19	113	3	.	3	11	.	.	43
64	23	.	11	7	3	.	3	17	127	3	181	3	.	31	7	29	3	13	3	.
65	3	73	3	.	227	3	11	3	7	.	71	.	3	.	3	11	.	3	13	3
566	.	3	43	3	59	29	.	7	3	17	3	.	23	3	37	3	103	.	7	11
67	.	7	41	19	3	.	3	137	.	3	53	3	7	.	11	.	3	31	3	.
68	3	11	3	.	71	3	109	3	.	19	17	7	3	13	3	89	.	3	11	3
69	149	3	23	3	13	7	61	.	3	.	3	17	.	3	13	3	7	.	.	.
70	11	.	37	113	3	19	3	29	.	3	97	3	17	.	43	7	3	.	3	.
671	3	.	3	7	11	3	41	3	.	7	19	.	3	11	3	.	.	3	83	3
72	17	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	23	.	3	71	3	19	11	.	7
73	13	17	.	11	3	83	3	7	23	3	13	3	11	7	17	.	3	.	3	.
74	3	7	3	.	.	3	7	3	.	191	.	.	3	.	3	17	11	3	.	3
75	7	3	11	3	.	181	107	251	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	.	31
676	.	67	.	17	3	7	3	.	19	3	7	3	.	47	239	11	3	17	3	61
77	3	79	3	.	7	3	13	3	241	.	11	89	3	.	3	7	.	3	37	3
78	.	3	.	3	19	17	73	.	3	7	3	.	29	3	7	3	179	.	13	19
79	.	11	7	59	3	113	3	23	7	3	.	3	.	.	41	.	3	.	3	7
80	3	13	3	47	23	3	17	3	251	.	59	13	3	7	3	19	.	3	7	3
681	11	3	13	3	.	.	7	17	3	11	3	193	7	3	61	3	.	83	.	23
82	7	241	.	.	3	.	3	.	17	3	.	3	31	11	13	.	3	7	3	139
83	3	167	3	83	.	3	53	3	11	17	7	.	3	23	3	37	7	3	41	3
84	73	3	67	3	7	37	31	13	3	53	3	41	11	3	.	3	89	.	.	.
85	.	61	.	7	3	131	3	11	.	3	17	3	.	19	7	.	3	.	3	13
686	3	31	3	19	.	3	59	3	7	163	13	11	3	.	3	.	83	3	19	3
87	23	3	127	3	.	.	11	7	3	19	3	.	13	3	.	3	53	.	7	.
88	107	7	83	13	3	.	3	.	.	3	11	3	7	17	19	23	3	43	3	11
89	3	.	3	.	137	3	.	3	41	157	.	7	3	29	3	13	71	3	.	3
90	.	3	151	3	.	7	13	.	3	23	3	.	.	3	17	3	7	13	11	29
691	43	19	29	.	3	11	3	.	13	3	.	3	73	257	47	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	67	3	19	3	.	7	37	107	3	.	3	.	17	3	.	3
93	37	3	7	3	11	.	.	103	3	181	3	13	19	3	.	3	.	17	31	7
94	.	.	13	31	3	41	3	7	11	3	.	3	.	7	23	.	3	11	3	37
95	3	7	3	11	13	3	7	3	19	37	251	23	3	31	3	.	197	3	17	3
696	7	3	47	3	151	67	43	11	3	.	3	7	179	3	83	3	11	7	257	17
97	47	43	11	.	3	7	3	13	113	3	7	3	103	137	.	.	3	97	3	19
98	3	29	3	.	7	3	11	3	.	13	.	.	3	.	3	7	211	3	.	3
99	13	3	53	3	.	151	139	29	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	113	11
700	.	.	7	.	3	53	3	.	7	3	239	3	13	59	11	.	3	89	3	7
701	3	11	3	13	.	3	.	3	.	.	23	19	3	7	3	.	.	3	7	3
02	.	3	.	3	61	11	7	23	3	.	3	.	7	3	.	3	.	19	199	.
03	7	29	167	.	3	.	3	19	.	3	.	3	53	61	37	31	3	7	3	103
04	3	23	3	181	11	3	67	3	13	.	7	.	3	11	3	.	7	3	13	3
05	.	3	.	3	7	107	151	97	3	109	3	.	251	3	.	3	23	11	19	.
706	17	13	.	7	3	241	3	.	.	3	.	3	11	23	7	.	3	41	3	31
07	3	17	3	.	31	3	.	3	7	197	107	.	3	13	3	127	11	3	263	3
08	101	3	11	3	13	19	23	7	3	.	3	11	193	3	13	3	.	.	7	.
09	.	7	17	23	3	.	3	.	.	3	19	3	7	89	.	11	3	61	3	.
10	3	19	3	17	.	3	47	3	29	.	11	7	3	251	3	.	19	3	23	3
711	97	3	211	3	17	7	19	.	3	13	3	.	83	3	11	3	7	.	.	13
12	13	11	31	.	3	17	3	229	67	3	13	3	19	.	.	7	3	191	3	.
13	3	113	3	7	29	3	.	3	73	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
14	11	3	7	3	.	.	17	.	3	11	3	.	61	3	.	3	199	.	37	7
15	127	.	23	43	3	13	3	7	37	3	.	3	233	7	.	13	3	29	3	.
716	3	7	3	101	19	3	7	3	11	67	41	83	3	.	3	71	31	3	.	3
17	7	3	.	3	.	.	29	.	3	17	3	7	11	3	23	3	.	7	13	157
18	19	59	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	109	29	.	19	3	.	3	.
19	3	13	3	.	7	3	.	3	23	71	17	11	3	.	3	7	.	3	.	3
20	89	3	13	3	107	23	11	.	3	7	3	17	.	3	7	3	61	.	.	109
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
661	83	3	7	3	.	109	127	.	3	.	3	.	17	3	11	3	.	37	53	7
62	97	11	59	173	3	23	3	7	.	3	191	3	79	7	13	151	3	.	3	167
63	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	.	41	3	.	3	197	13	3	67	3
64	7	3	.	3	41	.	.	13	3	11	3	7	19	3	17	3	.	7	29	.
65	61	.	19	101	3	7	3	.	.	3	7	3	139	11	.	17	3	.	3	13
666	3	.	3	191	7	3	163	3	11	61	13	131	3	.	3	7	17	3	.	3
67	.	3	241	3	101	.	179	23	3	7	3	43	11	3	7	3	.	17	.	67
68	.	.	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3	47	.	211	.	3	151	3	7
69	3	23	3	.	29	3	167	3	193	.	.	11	3	7	3	13	31	3	7	3
70	19	3	.	3	.	199	7	47	3	.	3	.	7	3	73	3	23	13	229	17
671	7	.	.	239	3	47	3	.	13	3	11	3	.	23	.	.	3	7	3	11
72	3	109	3	103	.	3	137	3	.	.	7	19	3	61	3	.	7	3	173	3
73	47	3	193	3	7	31	23	.	3	89	3	13	43	3	79	3	.	19	11	.
74	37	.	13	7	3	11	3	19	109	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	.
75	3	43	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	.	257	3	23	3
676	.	3	29	3	11	71	157	7	3	31	3	.	53	3	113	3	13	139	7	.
77	.	7	.	.	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	53	.	3	11	3	151
78	3	.	3	11	79	3	.	3	67	13	103	7	3	.	3	29	.	3	43	3
79	13	3	.	3	.	7	.	11	3	101	3	.	157	3	.	3	7	.	97	53
80	17	.	11	.	3	29	3	43	.	3	19	3	13	103	.	7	3	149	3	.
681	3	17	3	7	.	3	11	3	.	7	79	29	3	41	3	11	19	3	47	3
82	131	3	7	3	.	13	19	233	3	67	3	.	.	3	23	3	47	31	163	7
83	.	29	17	197	3	137	3	7	.	3	101	3	19	7	11	.	3	13	3	.
84	3	7	3	17	223	3	7	3	13	.	.	31	3	.	3	.	.	3	11	3
85	7	3	179	3	17	11	.	191	3	47	3	7	.	3	107	3	113	7	.	181
686	11	13	71	.	3	7	3	.	43	3	7	3	173	.	.	149	3	73	3	.
87	3	197	3	29	7	3	.	3	.	97	.	109	3	11	3	7	.	3	89	3
88	31	3	37	3	13	.	17	61	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.
89	19	53	7	11	3	.	3	17	7	3	23	3	11	101	149	19	3	.	3	7
90	3	199	3	53	.	3	.	3	17	.	67	37	3	7	3	59	11	3	7	3
691	.	3	11	3	23	.	7	263	3	13	3	11	7	3	43	3	.	.	.	11
92	7	23	.	.	3	.	3	113	53	3	13	3	29	79	193	11	3	7	3	23
93	3	223	3	43	139	3	71	3	.	173	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3
94	199	3	.	3	7	.	.	127	3	.	3	17	.	3	11	3	.	.	.	.
95	157	11	.	7	3	13	3	73	29	3	41	3	17	149	7	13	3	.	3	79
696	3	.	3	41	.	3	13	3	7	19	.	59	3	17	3	227	.	3	.	3
97	11	3	79	3	.	.	.	7	3	11	3	.	31	3	19	3	101	71	7	223
98	23	7	.	.	3	19	3	109	107	3	.	3	7	11	17	47	3	37	3	.
99	3	13	3	.	43	3	31	3	11	167	19	7	3	47	3	17	.	3	.	3
700	.	3	13	3	.	7	.	41	3	79	3	.	11	3	109	3	7	29	191	.
701	29	31	.	17	3	.	3	11	47	3	.	3	.	.	13	7	3	17	3	.
02	3	163	3	7	17	3	29	3	.	7	31	11	3	67	3	.	13	3	.	.
03	.	3	7	3	71	17	11	13	3	.	3	.	.	3	59	3	43	.	17	.
04	.	47	.	.	3	31	3	7	19	3	11	3	.	7	.	.	3	157	3	11
05	3	7	3	37	41	3	7	3	.	.	13	163	3	.	3	.	73	3	227	
706	7	3	.	3	19	.	.	17	3	29	3	7	13	3	.	3	223	7	11	19
07	139	.	173	13	3	7	3	.	17	3	7	3	37	.	71	29	3	.	3	83
08	3	.	3	59	7	3	.	3	131	11	.	.	3	73	3	7	.	3	31	
09	.	3	.	3	11	29	13	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	.	
10	227	41	7	.	3	179	3	.	7	3	17	3	.	31	67	.	3	11	3	
711	3	.	3	11	.	3	.	3	.	103	109	17	3	7	3	257	.	3	7	
12	43	3	.	3	.	.	7	11	3	263	3	13	7	3	.	3	11	.	83	3
13	7	.	11	.	3	.	3	23	149	3	137	3	41	13	.	.	3	7	3	
14	3	.	3	19	13	3	11	3	.	.	7	.	3	.	3	11	7	3	19	
15	.	3	163	3	7	.	59	.	3	19	3	31	47	3	17	3	13	.	.	11
716	137	79	131	7	3	.	3	13	.	3	229	3	43	97	7	17	3	.	3	
17	3	11	3	73	.	3	43	3	7	13	.	179	3	23	3	.	17	3	11	
18	13	3	181	3	.	11	.	7	3	41	3	.	.	3	.	3	29	17	7	
19	11	7	47	227	3	.	3	79	.	3	167	3	7	.	.	193	3	.	3	
20	3	.	3	13	11	3	19	3	97	.	.	7	3	11	3	.	.	3	17	
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
.	.	7	.	3	37	3	41	7	3	11	3	17	53	13	.	3	19	3	7
3	103	3	163	.	3	257	3	.	.	.	.	3	7	3	29	13	3	7	3
17	3	.	3	167	.	7	13	3	31	3	151	7	3	.	3	.	73	11	71
7	17	61	19	3	11	3	139	.	3	23	3	.	113	17	107	3	7	3	13
3	.	3	31	59	3	127	3	47	11	7	29	3	.	3	17	7	3	.	3
79	3	17	3	7	.	.	101	3	.	3	59	13	3	19	3	47	.	.	.
.	23	.	7	3	19	3	.	11	3	.	3	257	.	7	.	3	11	3	23
3	47	3	11	17	3	.	3	7	.	19	67	3	173	3	13	23	3	97	3
.	3	.	3	.	17	13	7	3	.	3	233	.	3	.	3	11	13	7	.
37	7	11	.	3	.	3	.	13	3	103	3	7	199	.	.	3	.	3	17
3	41	3	29	113	3	11	3	.	83	.	7	3	.	3	11	.	3	193	3
71	3	19	3	179	7	211	17	3	37	3	13	67	3	.	3	7	.	89	11
23	.	13	.	3	167	3	157	17	3	.	3	.	13	11	7	3	71	3	41
3	11	3	7	13	3	.	3	.	7	101	97	3	.	3	23	271	3	11	3
31	3	7	3	19	11	.	37	3	.	3	.	23	3	151	3	13	251	.	7
11	89	.	.	3	.	3	7	83	3	17	3	29	7	.	211	3	.	3	47
3	7	3	.	11	3	7	3	.	13	.	17	3	11	3	19	37	3	29	3
7	3	23	3	31	223	97	.	3	.	3	7	17	3	47	3	41	7	.	.
67	263	.	11	3	7	3	193	29	3	7	3	11	17	107	.	3	.	3	73
3	43	3	13	7	3	.	3	.	79	.	181	3	101	3	7	11	3	.	3
.	3	11	3	37	13	137	19	3	7	3	11	.	3	7	3	151	.	53	.
.	.	7	.	3	47	3	.	7	3	199	3	.	19	61	11	3	13	3	7
3	67	3	19	.	3	.	3	13	.	11	239	3	7	3	79	17	3	7	3
47	3	37	3	.	.	7	.	3	19	3	263	7	3	11	3	.	17	109	.
7	11	.	.	3	269	3	43	.	3	.	3	.	73	19	131	3	7	3	127
3	61	3	.	.	3	29	3	71	.	7	37	3	13	3	101	7	3	17	3
11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	31	41	.	17
131	19	239	7	3	79	3	23	.	3	.	3	.	11	7	67	3	.	3	29
3	.	3	173	23	3	19	3	7	.	31	.	3	.	3	137	.	3	149	3
179	3	107	3	.	.	.	7	3	13	3	.	11	3	.	3	.	101	7	13
13	7	19	.	3	31	3	11	43	3	13	3	7	.	227	29	3	163	3	.
3	157	3	.	.	3	.	3	19	.	.	7	3	23	3	.	67	3	47	3
257	3	.	3	127	7	11	109	3	.	3	.	71	3	.	3	7	59	.	151
.	.	.	73	3	13	3	53	199	3	11	3	.	241	.	7	3	37	3	11
3	.	3	7	.	3	13	3	.	7	.	47	3	.	3	.	.	3	31	3
19	3	7	3	.	83	.	.	3	47	3	.	53	3	43	3	.	67	11	7
17	.	.	.	3	11	3	7	.	3	41	3	.	7	53	23	3	.	3	211
3	7	3	41	47	3	7	3	.	11	191	13	3	.	3	181	149	3	73	3
7	3	13	3	11	.	89	31	3	23	3	7	.	3	.	3	.	7	173	53
.	.	17	29	3	7	3	19	11	3	7	3	.	139	13	.	3	11	3	113
3	.	3	11	7	3	103	3	163	.	269	.	3	19	3	7	13	3	.	3
181	3	.	3	17	.	199	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	.	19	.
41	.	7	137	3	17	3	167	7	3	127	3	37	.	23	97	3	.	3	7
3	.	3	109	43	3	11	3	.	.	13	23	3	7	3	11	.	3	7	3
113	3	.	3	.	19	7	.	3	59	3	103	7	3	.	3	.	.	41	11
7	.	.	13	3	23	3	17	193	3	19	3	.	197	11	173	3	7	3	.
3	11	3	79	41	3	.	3	17	73	7	277	3	.	3	13	7	3	11	3
.	3	89	3	7	11	13	.	3	17	3	.	.	3	.	3	43	13	.	31
11	53	.	7	3	.	3	.	13	3	43	3	19	107	7	47	3	.	3	.
3	.	3	53	11	3	.	3	7	.	17	.	3	11	3	41	.	3	.	3
.	3	83	3	29	59	67	7	3	233	3	13	137	3	.	3	.	11	7	179
.	7	13	11	3	.	3	37	31	3	29	3	7	13	.	.	3	.	3	.
3	23	3	97	13	3	.	3	167	.	53	7	3	17	3	.	11	3	.	3
17	3	11	3	199	7	.	.	3	139	3	11	.	3	211	3	7	43	.	41
19	17	179	.	3	.	3	13	.	3	.	3	31	23	17	7	3	.	3	.
3	71	3	7	.	3	.	3	.	7	11	149	3	29	3	17	.	3	.	3
13	3	7	3	.	.	23	.	3	.	3	19	.	3	11	3	17	.	.	7
.	11	29	17	3	.	3	7	59	3	223	3	13	7	277	.	3	17	3	.
3	7	3	13	17	3	7	3	67	29	149	.	3	.	3	59	41	3	23	3
7	3	.	3	181	13	.	61	3	11	3	7	.	3	73	3	.	7	17	.

01 | 03 | 07 | 09 | 11 | 13 | 17 | 19 | 21 | 23 | 27 | 29 | 31 | 33 | 37 | 39 | 41 | 43 | 47 | 49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
721	23	3	59	3	.	7	.	.	3	.	3	89	19	3	37	3	7	11	23	17
22	.	.	19	11	3	127	3	.	.	3	.	3	11	41	.	7	3	13	3	197
23	3	.	3	7	269	3	.	3	13	7	157	.	3	.	3	191	11	3	13	3
24	53	3	7	3	.	233	.	.	3	23	3	11	.	3	173	3	71	.	.	7
25	.	13	37	.	3	149	3	7	31	3	.	3	181	7	29	11	3	229	3	19
726	3	7	3	113	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	.	157	3	139	3
27	7	3	31	3	13	.	.	53	3	61	3	7	73	3	11	3	83	7	.	43
28	263	11	41	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	23	.	3	.	3	269
29	3	.	3	.	7	3	131	3	43	.	.	19	3	59	3	7	47	3	.	3
30	11	3	43	3	.	.	31	89	3	7	3	.	107	3	7	3	.	19	67	13
731	13	191	7	149	3	23	3	19	7	3	13	3	.	11	163	.	3	53	3	7
32	3	17	3	.	61	3	41	3	11	47	.	127	3	7	3	83	.	3	7	3
33	.	3	109	3	.	.	7	.	3	239	3	.	7	3	.	3	79	23	19	29
34	7	.	17	.	3	13	3	11	.	3	.	3	197	.	43	13	3	7	3	67
35	3	.	3	17	.	3	13	3	.	29	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
736	.	3	73	3	7	19	11	23	3	.	3	.	.	3	31	3	59	.	13	.
37	.	131	.	7	3	17	3	71	.	3	11	3	89	.	7	113	3	109	3	11
38	3	13	3	.	233	3	.	3	7	31	.	13	3	.	3	37	19	3	.	3
39	.	3	13	3	.	37	17	7	3	.	3	29	167	3	241	3	23	61	7	.
40	.	7	103	31	3	11	3	17	.	3	.	3	7	23	13	43	3	.	3	.
741	3	29	3	.	.	3	.	3	17	11	.	7	3	11	3	.	13	3	.	3
42	41	3	.	3	11	7	23	13	3	17	3	.	59	3	.	3	7	.	.	191
43	149	.	.	23	3	.	3	31	11	3	.	3	.	.	73	7	3	11	3	13
44	3	.	3	7	19	3	113	3	.	7	13	71	3	211	3	.	163	3	23	3
45	.	3	7	3	.	173	.	11	3	.	3	17	13	3	.	3	11	97	.	7
746	19	.	11	13	3	197	3	7	89	3	53	3	17	7	.	19	3	113	3	.
47	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	37	.	3	17	3	11	29	3	.	3
48	7	3	.	3	.	43	13	.	3	.	3	7	103	3	.	3	.	7	.	11
49	241	17	23	.	3	7	3	61	13	3	7	3	97	167	11	31	3	19	3	37
50	3	11	3	47	7	3	271	3	41	37	193	.	3	.	3	7	61	3	11	3
751	223	3	17	3	.	11	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	.	29	139
52	11	.	7	17	3	73	3	.	7	3	.	3	83	13	79	.	3	17	3	7
53	3	.	3	179	11	3	.	3	23	19	.	43	3	7	3	.	.	3	7	3
54	197	3	61	3	59	17	7	163	3	71	3	.	7	3	19	3	13	11	17	103
55	7	.	.	11	3	19	3	13	.	3	.	3	11	.	131	269	3	7	3	17
756	3	.	3	.	29	3	17	3	31	13	7	.	3	.	3	.	7	3	59	3
57	13	3	11	3	7	239	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	19	.	.	229
58	101	.	31	7	3	107	3	.	17	3	23	3	13	.	7	11	3	29	3	71
59	3	151	3	13	37	3	.	3	7	17	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3
60	59	3	19	3	23	13	29	7	3	127	3	.	.	3	11	3	.	47	7	.
761	271	7	.	.	3	.	3	59	19	3	17	3	7	29	47	61	3	13	3	23
62	3	.	3	.	.	3	53	3	13	89	83	7	3	.	3	.	23	3	13	3
63	11	3	29	3	19	7	.	.	3	11	3	.	17	3	.	3	7	79	241	19
64	89	13	101	157	3	.	3	47	.	3	31	3	.	11	.	7	3	.	3	227
65	3	37	3	7	.	3	23	3	11	7	73	.	3	13	3	19	191	3	.	3
766	.	3	7	3	13	31	.	43	3	.	3	.	11	3	13	3	53	271	.	7
67	23	.	.	59	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	31	17	3	41	3	61
68	3	7	3	151	101	3	7	3	.	.	59	11	3	.	3	23	17	3	131	3
69	7	3	41	3	.	.	11	19	3	13	3	7	23	3	167	3	.	7	37	13
70	13	29	251	263	3	7	3	.	37	3	7	3	.	19	157	127	3	.	3	11
771	3	.	3	19	7	3	.	3	.	229	71	113	3	79	3	7	.	3	17	3
72	67	3	23	3	.	.	.	.	3	7	3	.	109	3	7	3	.	37	11	17
73	.	103	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	223	.	19	13	3	193	3	7
74	3	73	3	29	71	3	13	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
75	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3	.	31	13	73
776	7	11	79	.	3	37	3	101	11	3	173	3	.	131	.	.	3	7	3	.
77	3	13	3	11	.	3	19	3	83	.	7	13	3	.	3	107	7	3	.	3
78	127	3	13	3	7	.	.	11	3	43	3	47	19	3	71	3	11	.	61	.
79	.	137	11	7	3	53	3	.	103	3	.	3	29	.	7	167	3	23	3	.
80	3	89	3	.	251	3	11	3	7	101	163	.	3	113	3	11	13	3	29	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
.	83	37	19	3	7	3	191	.	3	7	3	23	11	.	.	3	13	3	17
3	.	3	197	7	3	17	3	11	19	137	.	3	.	3	7	.	3	13	3
.	3	.	3	.	71	.	17	3	7	3	29	11	3	7	3	.	157	.	47
.	13	7	89	3	19	3	11	7	3	.	3	107	41	.	.	3	47	3	7
3	29	3	.	.	3	.	3	233	17	19	11	3	7	3	.	.	3	7	3
33	3	.	3	13	127	7	29	3	.	3	61	7	3	13	3	19	.	31	.
7	211	.	31	3	.	3	223	.	3	11	3	131	43	.	71	3	7	3	11
3	.	3	.	53	3	269	3	23	.	7	17	3	31	3	.	7	3	37	3
.	3	19	3	7	23	53	.	3	13	3	.	17	3	193	3	.	89	11	13
13	199	41	7	3	11	3	31	19	3	13	3	.	17	7	.	3	.	3	137
3	.	3	239	.	3	61	3	7	11	67	53	3	.	3	.	29	3	.	3
.	3	103	3	11	113	37	7	3	227	3	.	.	3	17	3	.	109	7	19
.	7	71	.	3	13	3	.	11	3	23	3	7	.	.	13	3	11	3	.
3	271	3	11	.	3	13	3	43	.	.	7	3	.	3	19	17	3	53	3
37	3	43	3	23	7	131	11	3	281	3	67	.	3	.	3	7	17	13	.
.	23	11	.	3	.	3	103	.	3	.	3	.	.	97	7	3	73	3	23
3	13	3	7	79	3	11	3	29	7	61	13	3	71	3	11	23	3	17	3
.	3	7	3	.	.	.	19	3	.	3	.	97	3	29	3	.	.	.	7
.	.	.	41	3	157	3	7	229	3	257	3	67	7	11	.	3	.	3	31
3	7	3	19	29	3	7	3	.	43	79	191	3	163	3	.	13	3	11	3
7	3	.	3	.	11	113	13	3	19	3	7	227	3	127	3	.	7	.	.
11	139	.	.	3	7	3	97	.	3	7	3	.	.	19	.	3	29	3	13
3	131	3	.	7	3	.	3	31	47	13	.	3	11	3	7	.	3	.	3
37	3	.	3	191	97	29	137	3	7	3	.	13	3	7	3	257	11	.	.
79	19	7	11	3	.	3	73	7	3	.	3	11	29	.	43	3	239	3	7
3	.	3	149	.	3	19	3	.	37	.	.	3	7	3	13	11	3	7	3
.	3	11	3	43	.	7	53	3	89	3	11	7	3	.	3	263	13	.	.
7	.	19	.	3	211	3	.	13	3	131	3	.	.	229	11	3	7	3	.
3	17	3	.	.	3	.	3	19	.	7	.	3	.	3	29	7	3	61	3
.	3	59	3	7	.	.	.	3	.	3	13	.	3	11	3	.	.	.	.
.	11	13	7	3	29	3	.	23	3	31	3	.	13	7	41	3	53	3	19
3	.	3	17	13	3	241	3	7	.	43	29	3	.	3	.	137	3	113	3
11	3	.	3	17	31	233	7	3	11	3	167	.	3	163	3	13	.	7	.
.	7	127	.	3	17	3	13	.	3	107	3	7	11	31	.	3	23	3	79
3	149	3	.	37	3	.	3	11	13	.	7	3	.	3	67	73	3	.	3
13	3	79	3	.	7	17	.	3	31	3	.	11	3	.	3	7	19	.	.
.	.	.	101	3	41	3	11	71	3	.	3	13	37	.	7	3	43	3	.
3	179	3	7	23	3	.	3	17	7	47	11	3	19	3	.	223	3	.	3
.	3	7	3	101	13	11	.	3	17	3	.	.	3	.	3	67	.	19	7
43	.	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	.	3	13	3	11
3	7	3	47	157	3	7	3	13	41	17	.	3	23	3	.	.	3	13	3
7	3	.	3	229	19	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	11	233
.	13	.	53	3	7	3	263	191	3	7	3	17	281	137	.	3	67	3	.
3	19	3	23	7	3	73	3	.	11	139	31	3	13	3	7	19	3	29	3
17	3	.	3	11	109	19	179	3	7	3	.	.	3	7	3	59	197	23	.
.	17	7	.	3	.	3	.	7	3	53	3	19	.	17	23	3	11	3	7
3	191	3	11	107	3	181	3	.	.	.	.	3	7	3	17	97	3	7	3
31	3	17	3	.	.	7	11	3	13	3	113	7	3	.	3	11	37	.	13
7	.	11	17	3	.	3	283	101	3	13	3	127	239	197	.	3	7	3	109
3	.	3	.	17	3	11	3	61	.	7	79	3	43	3	11	7	3	.	3
.	3	41	3	7	17	.	43	3	101	3	97	59	3	.	3	71	29	17	11
19	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	.	7	13	3	.	3	17
3	11	3	227	.	3	13	3	7	97	103	23	3	167	3	.	.	3	11	3
.	3	.	3	239	11	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	181	.	7	.
11	7	113	37	3	23	3	47	17	3	101	3	7	103	.	139	3	19	3	29
3	13	3	.	11	3	.	3	.	17	241	7	3	11	3	.	.	3	233	3
.	3	13	3	97	7	.	.	3	29	3	101	31	3	.	3	7	11	83	89
47	181	43	11	3	.	3	79	109	3	17	3	11	.	13	7	3	.	3	191
3	.	3	7	.	3	31	3	.	7	23	17	3	.	3	.	11	3	127	3
167	3	7	3	.	29	.	13	3	73	3	11	17	3	19	3	31	229	.	7
01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
781	31	3	.	3	47	.	.	7	3	.	3	.	37	3	41	3	.	.	7	11
82	17	7	139	.	3	61	3	23	29	3	.	3	7	.	11	79	3	59	3	13
83	3	11	3	127	23	3	.	3	109	181	13	7	3	103	3	43	277	3	11	3
84	19	3	67	3	31	7	.	131	3	97	3	.	13	3	.	3	7	53	.	23
85	11	.	17	13	3	251	3	.	.	3	.	3	179	.	89	7	3	.	3	53
786	3	.	3	7	11	3	97	3	151	7	29	19	3	11	3	13	.	3	.	3
87	61	3	7	3	17	79	13	227	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	.	7
88	29	.	.	11	3	17	3	7	13	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	257
89	3	7	3	23	281	3	7	3	157	151	.	.	3	19	3	.	11	3	197	3
90	7	3	11	3	173	.	17	37	3	107	3	7	31	3	.	3	139	7	19	83
791	.	.	13	.	3	7	3	17	41	3	7	3	.	13	.	11	3	.	3	29
92	3	41	3	.	7	3	31	3	17	.	11	.	3	.	3	7	37	3	179	3
93	73	3	.	3	61	19	.	139	3	7	3	.	163	3	7	3	13	.	.	.
94	.	11	7	181	3	229	3	13	7	3	19	3	.	61	101	29	3	.	3	7
95	3	19	3	.	.	3	251	3	47	13	17	.	3	7	3	.	19	3	7	3
796	11	3	.	3	37	29	7	.	3	11	3	17	7	3	.	3	.	.	.	.
97	7	173	.	47	3	31	3	.	241	3	.	3	13	11	23	73	3	7	3	199
98	3	47	3	13	.	3	.	3	11	.	7	23	3	17	3	.	7	3	109	3
99	17	3	37	3	7	13	.	211	3	.	3	.	11	3	.	3	41	167	.	.
800	.	17	223	7	3	23	3	11	.	3	.	3	73	53	7	283	3	13	3	173
801	3	.	3	71	19	3	.	3	7	.	.	11	3	181	3	17	.	3	13	3
02	.	3	17	3	83	.	11	7	3	.	3	.	43	3	.	3	17	23	7	59
03	19	7	107	17	3	.	3	.	179	3	11	3	7	31	.	19	3	17	3	11
04	3	43	3	61	17	3	67	3	.	.	23	7	3	13	3	.	.	3	101	3
05	109	3	.	3	13	7	.	23	3	197	3	19	61	3	13	3	7	83	11	.
806	.	59	.	79	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	17
07	3	23	3	7	.	3	17	3	37	7	.	.	3	.	3	.	173	3	43	3
08	233	3	7	3	11	.	193	17	3	13	3	31	29	3	47	3	23	41	.	7
09	13	.	73	19	3	.	3	7	11	3	13	3	47	7	109	.	3	11	3	107
10	3	7	3	11	103	3	7	3	.	17	.	89	3	.	3	131	83	3	.	3
811	7	3	.	3	277	.	23	11	3	.	3	7	.	3	19	3	11	7	.	.
12	31	193	11	23	3	7	3	181	67	3	7	3	.	.	29	13	3	.	3	.
13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	19	17	3	97	3	7	199	3	23	3
14	47	3	.	3	29	.	41	257	3	7	3	59	17	3	7	3	19	227	13	11
15	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3	23	17	11	83	3	139	3	7
816	3	11	3	37	127	3	.	3	.	23	.	13	3	7	3	.	151	3	7	3
17	29	3	13	3	.	11	7	.	3	.	3	53	7	3	17	3	89	263	157	.
18	7	.	23	109	3	71	3	.	19	3	41	3	37	.	13	17	3	7	3	.
19	3	.	3	41	11	3	.	3	.	.	7	73	3	11	3	163	7	3	167	3
20	.	3	31	3	7	137	.	13	3	.	3	211	79	3	23	3	103	11	53	19
821	113	.	29	7	3	.	3	127	.	3	37	3	11	.	7	.	3	.	3	13
22	3	83	3	43	.	3	.	3	7	29	13	.	3	107	3	19	11	3	17	3
23	.	3	11	3	.	23	31	7	3	.	3	11	13	3	.	3	47	.	7	17
24	41	7	.	13	3	.	3	.	.	3	67	3	7	.	.	11	3	.	3	.
25	3	31	3	.	.	3	.	3	.	71	11	7	3	269	3	13	.	3	151	3
826	.	3	.	3	131	7	13	19	3	47	3	29	89	3	11	3	7	13	41	.
27	83	11	.	.	3	.	3	37	13	3	23	3	.	19	.	7	3	.	3	.
28	3	29	3	7	41	3	173	3	79	7	179	67	3	.	3	.	.	3	19	3
29	11	3	7	3	23	.	163	29	3	11	3	13	.	3	31	3	37	149	.	7
30	53	23	13	.	3	.	3	7	.	3	.	3	251	7	19	.	3	.	3	23
831	3	7	3	137	13	3	7	3	11	31	.	223	3	193	3	41	23	3	271	3
32	7	3	.	3	139	53	.	.	3	.	3	7	11	3	37	3	13	7	31	.
33	17	19	.	31	3	7	3	11	263	3	7	3	199	.	61	.	3	89	3	.
34	3	17	3	.	7	3	19	3	.	13	.	11	3	31	3	7	29	3	.	3
35	13	3	.	3	.	.	11	193	3	7	3	.	19	3	7	3	.	179	.	41
836	23	.	7	269	3	.	3	31	7	3	11	3	13	67	53	.	3	127	3	7
37	3	61	3	13	.	3	211	3	19	.	.	199	3	7	3	23	.	3	7	3
38	71	3	.	3	17	13	7	.	3	.	3	37	7	3	149	3	.	43	11	53
39	7	37	59	113	3	11	3	.	131	3	79	3	137	.	.	47	3	7	3	19
40	3	.	3	.	.	3	.	3	13	11	7	83	3	47	3	.	7	3	13	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
841	37	31	151	241	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	13
42	3	7	3	107	.	3	7	3	.	.	11	.	3	131	3	.	61	3	.	3
43	7	3	.	3	59	.	.	.	3	37	3	7	13	3	11	3	19	7	.	.
44	.	11	.	13	3	7	3	29	.	3	7	3	.	23	.	17	3	.	3	.
45	3	.	3	.	7	3	223	3	.		181	137	3	.	3	7	17	3	59	3
846	11	3	19	3	211	191	13	37	3	7	3	.	.	3	7	3	53	13	47	.
47	.	71	7	23	3	.	3	.	7	3	193	3	.	11	.	101	3	83	3	7
48	3	137	3	.	.	3	89	3	11	271	.	41	3	7	3	43	37	3	7	3
49	59	3	197	3	19	.	7	.	3	163	3	13	7	3	157	3	29	173	.	17
50	7	167	13	.	3	151	3	11	.	3	.	3	23	13	.	277	3	7	3	.
851	3	.	3	.	13	3	47	3	.	23	7	11	3	.	3	19	7	3	.	3
52	.	3	139	3	7	.	11	31	3	.	3	.	29	3	.	3	13	.	.	163
53	197	.	23	7	3	.	3	13	41	3	11	3	.	.	7	61	3	31	3	11
54	3	41	3	223	.	3	229	3	7	13	.	.	3	37	3	.	43	3	.	3
55	13	3	37	3	233	.	.	7	3	.	3	31	.	3	23	3	113	131	7	.
856	.	7	.	59	3	11	3	.	.	3	.	3	7	19	29		3	.	3	41
57	3	.	3	13	.	3	.	3	23	11	59	7	3	.	3	83	179	3	19	3
58	239	3	53	3	11	7	.	.	3	19	3	.	.	3	.	3	7	.	.	293
59	17	.	271	.	3	53	3	151	11	3	29	3	.	.	19	7	3	11	3	61
60	3	17	3	7	.	3	.	3	13	7	.	.	3	227	3	97	139	3	13	3
861	29	3	7	3	.	.	.	11	3	71	3	43	.	3	.	3	11	.	277	7
62	.	13	11	.	3	73	3	7	151	3	23	3	53	7	83	.	3	.	3	.
63	3	7	3	17	.	3	7	3	37	.	173	131	3	13	3	11	.	3	79	3
64	7	3	71	3	13	.	103	89	3	.	3	7	19	3	13	3	.	7	137	11
65	.	23	19	.	3	7	3	241	31	3	7	3	.	.	11	.	3	37	3	23
866	3	11	3	257	7	3	37	3	19	29	.	.	3	41	3	7	23	3	11	3
67	277	3	31	3	.	11	17	.	3	7	3		43	3	7	3	127	.	223	13
68	11	61	7	47	3	.	3	17	7	3	13	3	31	71	.	37	3	.	3	.
69	3	43	3	233	11	3	23	3	17	.	.	.	3	7	3	.	227	3	7	3
70	19	3	167	3	.	.	7	173	3	17	3	29	7	3	.	3	.	11	6	.
871	7	.	.	11	3	13	3	.		3	151	3	11	.	79	13	3	7	3	.
72	3	29	3	37	.	3	13	3	.	.	7	19	3	83	3	23	7	3	43	3
73	67	3	11	3	7	.	.	29	3		3	11	23	3	.	3	167	19	13	113
74	71	.	.	7	3	61	3	19	.	3	.	3	17	.	7	11	3	.	3	157
75	3	13	3	.	.	3	.	3	7	.	11	13	3	17	3	.	.	3	.	3
876	17	3	13	3	79	.	41	7	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.
77	.	7	229	139	3	139	3	.	.	3	37	3	7	59	13	.	3	.	3	47
78	3	.	3	277	.	3	137	3	53	31	71	7	3	.	3	17	13	3	107	3
79	11	3	17	3	.	7	.	13	3	11	3	23	.	3	47	3	7	.	31	37
80	.	.	.	17	3	283	3	.	23	3	19	3	47	11	.	7	3	17	3	13
881	3	19	3	7	17	3	.	3	11	7	13	.	3	31	3	53	19	3	181	3
82	193	3	7	3	.	17	19	47	3	.	3	83	11	3	.	3	.	79	17	7
83	.	227	233	13	3	47	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	23	3	17
84	3	7	3	211	.	3	7	3	29	.	.	11	3	191	3	13	59	3	241	3
85	7	3	67	3	61	.	11	17	3	.	3	7	223	3	29	3	37	7	.	73
886	41	251	.	.	3	7	3	23	13	3	7	3	263	o	151	137	3	.	3	11
87	3	107	3	43	7	3	79	3	.	17	83	.	3	89	3	7	.	3	.	3
88	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	13	211	3	7	3	73	.	11	23
89	19	.	7	67	3	11	3	.	7	3	17	3	113	13	.	19	3	29	3	7
90	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	127	17	3	7	3	269	.	3	7	3
891	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	13	97	239	59
92	7	.	37	.	3	.	3	13	11	3	.	3	.	17	.	233	3	7	3	31
93	3	.	3	11	31	3	.	3	179	13	7	.	3	157	3	41	7	3	47	3
94	13	3	29	3	7	.	.	11	3	223	3	37	.	3	17	3	11	.	23	.
95	.	37	11	7	3	.	3	.	.	3	.	3	13	.	7	17	3	151	3	149
896	3	.	3	13	.	3	11	3	7	19	.	47	3	.	3	11	17	3	157	3
97	271	3	109	3	283	13	73	7	3	23	3	53	61	3	19	3	43	17	7	11
98	89	7	31	.	3	19	3	.	.	3	43	3	7	.	11	.	3	13	3	.
99	3	11	3	.	47	3	.	3	13	.	19	7	3	139	3	.	53	3	11	3
900	.	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	197	.	3	179	3	7	127	53	17
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
841	19	3	23	3	7	.	17	73	3	41	3	.	.	3	29	3	.	59	269	.
42	173	13	109	7	3	.	3	17	11	3	71	3	271	89	7	31	3	11	3	.
43	3	67	3	11	29	3	239	3	7	139	.	19	3	13	3	.	.	3	37	3
44	79	3	.	3	13	.	.	7	3	17	3	23	.	3	13	3	11	19	7	.
45	.	7	11	.	3	103	3	19	23	3	83	3	7	41	251	.	3	29	3	31
846	3	.	3	.	31	3	11	3	227	.	17	7	3	19	3	11	.	3	.	3
47	.	3	131	3	.	7	29	103	3	13	3	17	149	3	.	3	7	.	19	11
48	13	53	.	.	3	113	3	.	.	3	13	3	17	29	11	7	3	23	3	73
49	3	11	3	7	.	3	.	3	31	7	.	.	3	17	3	37	.	3	11	3
50	17	3	7	3	.	11	257	97	3	241	3	149	.	3	.	3	.	.	43	7
851	11	17	31	.	3	13	3	7	53	3	19	3	103	7	17	13	3	.	3	.
52	3	7	3	.	11	3	7	3	71	269	53	107	3	11	3	17	19	3	.	3
53	7	3	17	3	.	.	19	.	3	59	3	7	.	3	103	3	17	7	13	23
54	.	.	97	11	3	7	3	.	127	3	7	3	11	73	.	53	3	17	3	193
55	3	13	3	67	7	3	41	3	.	83	.	13	3	23	3	7	11	3	.	3
856	97	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	47	3	7	3	.	67	17	43
57	.	29	7	191	3	139	3	199	7	3	31	3	.	109	13	11	3	.	3	7
58	3	.	3	23	19	3	17	3	43	79	11	157	3	7	3	.	13	3	7	3
59	23	3	43	3	67	31	7	13	3	149	3	127	7	3	11	3	.	113	23	.
60	7	11	47	41	3	89	3	.	17	3	.	3	59	.	31	19	3	7	3	13
861	3	101	3	29	.	3	199	3	.	17	7	.	3	.	3	79	7	3	.	3
62	11	3	.	3	7	.	281	.	3	31	3	19	13	3	.	3	.	.	.	211
63	.	.	.	7	3	67	3	.	.	3	17	3	.	11	7	.	3	19	3	.
64	3	.	3	31	.	3	.	3	7	43	.	17	3	197	3	13	.	3	67	3
65	41	3	101	3	.	107	13	7	3	.	3	.	11	3	.	3	131	13	7	.
866	73	7	193	19	3	79	3	11	13	3	.	3	7	17	23	.	3	.	3	181
67	3	.	3	101	53	3	.	3	.	19	107	7	3	.	3	59	229	3	29	3
68	.	3	.	3	.	7	11	.	3	109	3	13	283	3	17	3	7	31	113	67
69	.	89	13	.	3	19	3	.	29	3	11	3	.	13	37	7	3	.	3	11
70	3	263	3	7	13	3	83	3	.	7	19	31	3	.	3	73	17	3	251	3
871	.	3	7	3	43	101	67	61	3	179	3	.	.	3	.	3	13	17	11	7
72	.	.	.	71	3	11	3	7	197	3	.	3	.	7	191	41	3	.	3	.
73	3	7	3	.	199	3	7	3	41	11	23	59	3	.	3	31	281	3	17	3
74	7	3	19	3	11	149	47	23	3	.	3	7	.	3	89	3	.	7	59	17
75	29	.	.	.	3	7	3	67	11	3	7	3	13	.	.	.	3	11	3	251
876	3	23	3	11	7	3	29	3	.	73	43	.	3	.	3	7	.	3	.	3
77	.	3	127	3	19	13	.	11	3	7	3	61	41	3	7	3	11	.	.	19
78	59	.	7	103	3	41	3	.	7	3	.	3	.	23	.	179	3	13	3	7
79	3	281	3	.	.	3	11	3	13	.	.	97	3	7	3	11	.	3	7	3
80	191	3	173	3	107	83	7	.	3	29	3	.	7	3	59	3	137	.	37	11
881	7	13	199	23	3	131	3	.	37	3	.	3	109	163	11	29	3	7	3	89
82	3	11	3	.	.	3	61	3	103	41	7	43	3	13	3	.	7	3	11	3
83	53	3	149	3	7	11	97	19	3	67	3	.	31	3	13	3	157	37	.	109
84	11	197	53	7	3	.	3	.	.	3	103	3	23	19	7	107	3	.	3	.
85	3	17	3	19	11	3	31	3	7	23	101	283	3	11	3	.	.	3	19	3
886	.	3	.	3	.	.	.	7	3	13	3	71	.	3	131	3	31	11	7	13
87	13	7	17	11	3	37	3	29	.	3	13	3	7	47	19	.	3	.	3	.
88	3	.	3	17	.	3	.	3	181	.	31	7	3	.	3	103	11	3	.	3
89	.	3	11	3	17	7	43	.	3	193	3	11	101	3	23	3	7	.	.	61
90	.	19	.	29	3	13	3	.	.	3	281	3	229	.	.	7	3	41	3	139
891	3	.	3	7	163	3	13	3	23	7	11	257	3	101	3	.	79	3	191	3
92	149	3	7	3	.	23	17	.	3	.	3	73	19	3	11	3	29	.	13	7
93	199	11	19	193	3	.	3	7	.	3	139	3	.	7	.	71	3	.	3	.
94	3	7	3	.	137	3	7	3	17	131	.	13	3	43	3	109	.	3	31	3
95	7	3	13	3	.	.	.	43	3	11	3	7	29	3	101	3	.	7	.	.
896	37	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	13	.	3	257	3	19
97	3	.	3	.	7	3	.	3	11	107	17	.	3	.	3	7	13	3	.	3
98	19	3	59	3	23	73	.	13	3	7	3	17	11	3	7	3	.	241	.	.
99	293	23	7	.	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	29	.	3	31	3	7
900	3	.	3	.	113	3	.	3	.	.	13	11	3	7	3	.	23	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
901	11	13	.	251	3	97	3	227	.	3	.	3	193	173	23	7	3	109	3	.
02	3	.	3	7	11	3	.	3	83	7	.	23	3	11	3	.	31	3	.	3
03	73	3	7	3	13	.	37	181	3	41	3	59	103	3	13	3	61	11	167	7
04	.	.	.	11	3	23	3	7	19	3	31	3	11	7	.	.	3	149	3	151
05	3	7	3	29	.	3	7	3	131	.	.	.	3	.	3	37	11	3	.	3
906	7	3	11	3	19	31	.	.	3	13	3	7	.	3	233	3	.	7	.	13
07	13	.	61	.	3	7	3	83	257	3	7	3	.	41	31	11	3	103	3	.
08	3	.	3	71	7	3	197	3	.	.	11	61	3	.	3	7	.	3	.	3
09	.	3	.	3	.	229	.	23	3	7	3	79	.	3	7	3	211	199	.	103
10	17	11	7	.	3	13	3	.	7	3	227	3	29	.	59	13	3	181	3	7
911	3	17	3	31	179	3	13	3	.	293	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
12	11	3	223	3	197	53	7	19	3	11	3	.	7	3	.	3	23	.	13	.
13	7	.	17	.	3	127	3	53	29	3	271	3	.	11	149	241	3	7	3	167
14	3	13	3	17	.	3	113	3	11	.	7	13	3	.	3	61	7	3	19	3
15	37	3	13	3	7	.	23	71	.	19	3	.	11	3	239	3	.	31	41	83
916	139	47	101	7	3	17	3	11	.	3	59	3	.	43	7	.	3	113	3	37
17	3	.	3	293	.	3	41	3	7	37	29	11	3	.	3	199	13	3	23	3
18	.	3	.	3	.	.	11	7	3	.	3	229	131	3	.	3	.	29	7	53
19	29	7	73	.	3	107	3	17	.	3	11	3	7	149	89	.	3	.	3	11
20	3	.	3	.	101	3	11	3	17	23	13	7	3	.	3	31	.	3	83	3
921	31	3	.	3	.	7	251	.	3	17	3	181	13	3	199	3	7	.	11	43
22	137	.	19	13	3	11	3	.	.	3	.	3	149	.	.	7	3	.	3	29
23	3	241	3	7	.	3	.	3	19	7	17	127	3	.	3	13	107	3	.	3
24	.	3	7	3	11	.	13	.	3	29	3	17	.	3	23	3	97	13	193	7
25	233	.	.	79	3	71	3	7	11	3	67	3	17	7	37	29	3	11	3	19
926	3	7	3	11	37	3	7	3	23	.	.	211	3	17	3	.	.	3	.	3
27	7	3	.	3	83	23	.	11	3	.	3	7	47	3	.	3	11	7	163	137
28	.	17	11	.	3	7	3	101	.	3	7	3	.	13	17	263	3	227	3	.
29	3	61	3	53	7	3	11	3	.	43	.	19	3	199	3	7	.	3	41	3
30	.	3	17	3	281	47	191	167	3	7	3	41	31	3	7	3	13	19	.	11
931	157	.	7	17	3	.	3	13	7	3	23	3	.	.	11	.	3	17	3	7
32	3	11	3	83	17	3	31	3	73	13	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
33	13	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	31	269	17	277
34	7	23	.	29	3	109	3	.	103	3	.	3	13	233	223	41	3	7	3	17
35	3	.	3	13	11	3	17	3	41	.	7	.	3	11	3	89	7	3	139	3
936	.	3	.	3	7	13	179	17	3	251	3	.	109	3	.	3	29	11	37	71
37	.	.	83	7	3	31	3	.	17	3	19	3	11	67	7	.	3	13	3	241
38	3	19	3	.	.	3	23	3	7	17	.	101	3	103	3	107	11	3	13	3
39	.	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	29	3	.	3	.	37	7	.
40	23	7	.	.	3	41	3	149	167	3	17	3	7	.	271	11	3	157	3	.
941	3	139	3	.	.	3	.	3	.	61	11	7	3	13	3	23	47	3	31	3
42	.	3	.	3	13	7	71	.	3	59	3	.	17	3	11	3	7	73	79	307
43	181	11	.	.	3	37	3	257	.	3	.	3	.	17	29	7	3	.	3	.
44	3	67	3	7	19	3	263	3	.	7	.	89	3	.	3	.	.	3	.	3
45	11	3	7	3	29	.	47	31	3	11	3	.	.	3	17	3	.	.	.	7
946	13	.	89	37	3	.	3	7	.	3	13	3	173	7	101	17	3	31	3	.
47	3	7	3	.	53	3	7	3	11	.	.	43	3	61	3	211	17	3	.	3
48	7	3	113	3	.	59	53	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.
49	43	.	.	107	3	7	3	11	23	3	7	3	59	.	139	13	3	19	3	.
50	3	.	3	.	7	3	13	3	.	167	.	11	3	29	3	7	101	3	17	3
951	.	3	.	3	.	227	11	73	3	7	3	251	.	3	7	3	89	.	13	17
52	31	.	7	19	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	131	.	3	23	3	7
53	3	13	3	191	.	3	.	3	199	19	.	13	3	7	3	.	67	3	7	3
54	.	3	13	3	73	.	7	.	3	37	3	.	7	3	19	3	.	.	11	31
55	7	43	.	149	3	11	3	23	59	3	.	3	.	83	13	.	3	7	3	.
956	3	.	3	67	23	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	59	7	3	101	3
57	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	29	.	3	.	3	19	67	.	23
58	.	.	149	7	3	.	3	.	41	3	79	3	61	47	7	239	3	11	3	13
59	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	13	.	3	23	3	197	37	3	.	3
60	.	3	19	3	67	.	.	7	3	131	3	109	13	3	137	3	11	.	7	139
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
901	17	3	89	3	29	·	7	37	3	·	3	31	7	3	·	3	·	19	·	·
02	7	17	43	13	3	·	3	19	·	3	11	3	·	137	17	·	3	7	3	11
03	3	·	3	·	109	3	23	3	·	·	7	·	3	19	3	13	7	3	·	3
04	29	3	17	3	7	61	13	·	3	·	3	173	·	3	41	3	17	13	11	·
05	23	83	137	7	3	11	3	41	13	3	53	3	239	·	7	157	3	17	3	·
906	3	269	3	·	17	3	71	3	7	11	·	·	3	29	3	23	89	3	·	3
07	151	3	47	3	11	17	139	7	3	43	3	13	23	3	·	3	163	·	7	29
08	47	7	13	43	3	·	3	89	11	3	19	3	7	13	·	97	3	11	3	17
09	3	19	3	11	13	3	17	3	·	29	·	7	3	37	3	·	19	3	·	3
10	83	3	23	3	41	7	19	11	3	61	3	·	·	3	79	3	7	71	·	·
911	·	·	11	·	3	·	3	13	17	3	73	3	19	·	67	7	3	·	3	·
12	3	·	3	7	263	3	11	3	107	7	97	37	3	·	3	11	·	3	·	3
13	13	3	7	3	103	211	·	·	3	·	3	23	·	3	·	3	59	·	·	7
14	109	·	·	·	3	·	3	7	23	3	17	3	13	7	11	191	3	·	3	·
15	3	7	3	13	19	3	7	3	·	·	·	17	3	·	3	67	·	3	11	3
916	7	3	151	3	71	11	31	29	3	·	3	7	17	3	277	3	·	7	47	107
17	13	·	·	89	3	7	3	163	·	3	7	3	·	17	263	19	3	13	3	41
18	3	31	3	97	7	3	·	3	13	·	79	139	3	11	3	7	43	3	13	3
19	·	3	·	3	·	41	·	·	3	7	3	19	59	3	7	3	67	11	·	197
20	·	13	7	11	3	43	3	23	7	3	·	3	11	·	71	17	3	19	3	7
921	3	·	3	157	23	3	37	3	61	·	·	·	3	7	3	·	11	3	7	3
22	·	3	11	3	13	257	7	·	3	53	3	11	7	3	13	3	41	17	·	23
23	7	·	·	19	3	·	3	·	71	3	·	3	·	·	·	11	3	7	3	·
24	3	59	3	·	·	3	·	3	89	19	7	·	3	23	3	·	7	3	17	3
25	·	3	·	3	7	151	·	·	3	13	3	43	·	3	11	3	53	·	29	13
926	13	11	·	7	3	19	3	·	·	3	13	3	·	·	7	59	3	·	3	·
27	3	·	3	23	·	3	·	3	7	113	19	·	3	31	3	·	·	3	71	3
28	11	3	·	3	·	·	·	7	3	11	3	131	293	3	29	3	19	·	7	·
29	·	7	·	·	3	13	3	31	239	3	109	3	7	11	·	13	3	·	3	113
30	3	·	3	·	29	3	13	3	11	163	·	7	3	·	3	·	127	3	·	3
931	·	3	19	3	59	7	151	·	3	23	3	·	11	3	·	3	7	41	13	·
32	·	·	·	179	3	·	3	11	19	3	37	3	·	·	·	7	3	29	3	79
33	3	17	3	7	89	3	73	3	·	7	·	11	3	·	3	47	61	3	59	3
34	113	3	7	3	19	·	11	151	3	211	3	·	·	3	·	3	·	·	·	7
35	17	·	·	·	3	·	3	7	137	3	11	3	·	7	13	31	3	173	3	11
936	3	7	3	73	229	3	7	3	47	283	113	23	3	·	3	19	13	3	43	3
37	7	3	29	3	·	·	41	13	3	79	3	7	191	3	·	3	71	7	11	97
38	·	127	17	47	3	7	3	37	·	3	7	3	269	223	·	·	3	·	3	13
39	3	47	3	17	7	3	·	3	·	11	13	·	3	·	3	7	193	3	·	3
40	163	3	·	3	11	·	109	19	3	7	3	·	13	3	7	3	37	23	73	·
941	·	·	7	13	3	17	3	·	7	3	41	3	53	19	97	131	3	11	3	7
42	3	·	3	11	·	3	107	3	31	·	23	29	3	7	3	13	·	3	7	3
43	·	3	157	3	127	197	7	11	3	19	3	·	7	3	37	3	11	13	·	·
44	7	29	11	59	3	·	3	17	13	3	·	3	107	·	19	61	3	7	3	53
45	3	23	3	·	·	3	11	3	17	·	7	271	3	·	3	11	7	3	·	3
946	·	3	103	3	7	181	137	41	3	17	3	13	73	3	·	3	23	·	281	11
47	41	19	13	7	3	193	3	97	·	3	·	3	·	13	7	·	3	·	3	47
48	3	11	3	29	13	3	19	3	7	·	17	79	3	239	3	·	31	3	11	3
49	·	3	269	3	·	11	23	7	3	73	3	17	19	3	43	3	13	·	7	·
50	11	7	19	23	3	·	3	13	·	3	31	3	7	·	·	·	3	·	3	61
951	3	·	3	43	11	3	59	3	19	13	·	7	3	11	3	·	·	3	23	3
52	13	3	·	3	·	7	·	47	3	·	3	·	151	3	·	3	7	11	233	157
53	97	17	167	11	3	47	3	·	283	3	127	3	11	·	17	7	3	·	3	19
54	3	53	3	7	·	3	·	3	·	7	307	·	3	·	3	17	11	3	29	3
55	19	3	7	3	·	13	227	·	3	31	3	11	·	3	61	3	17	109	·	7
956	·	41	23	17	3	271	3	7	29	3	241	3	163	7	103	11	3	13	3	83
57	3	7	3	31	17	3	7	3	13	·	11	19	3	·	3	·	·	3	13	3
58	7	3	·	3	257	17	37	·	3	·	3	7	·	3	11	3	·	7	17	41
59	229	11	·	·	3	7	3	19	·	3	7	3	41	53	·	·	3	59	3	17
60	3	·	3	·	7	3	17	3	23	191	29	·	3	13	3	7	307	3	·	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
961	17	7	11	.	3	223	3	277	49	3	97	3	7	251	.	127	3	79	3	.
62	3	17	3	23	.	3	11	3	.	.	41	7	3	.	3	11	157	3	109	3
63	23	3	193	3	19	7	13	61	3	.	3	.	.	3	.	3	7	13	23	11
64	.	149	17	229	3	67	3	.	13	3	211	3	.	73	11	7	3	.	3	43
65	3	11	3	7	103	3	.	3	263	7	.	83	3	37	3	19	29	3	11	3
966	.	3	7	3	17	11	79	53	3	23	3	13	71	3	41	3	241	.	127	7
67	11	.	13	97	3	17	3	7	311	3	197	3	.	7	.	.	3	89	3	.
68	3	7	3	131	11	3	7	3	.	.	.	37	3	11	3	179	113	3	.	3
69	7	3	.	3	.	199	17	19	3	103	3	7	.	3	31	3	13	7	29	67
70	.	.	.	11	3	7	3	13	.	3	7	3	11	19	23	.	3	53	3	107
971	3	.	3	19	7	3	.	3	17	13	.	23	3	137	3	7	11	3	19	3
72	13	3	11	3	41	.	67	191	3	7	3	11	.	3	7	3	.	47	31	79
73	.	.	7	31	3	23	3	307	7	3	.	3	13	131	19	11	3	311	3	7
74	3	257	3	13	29	3	61	3	37	.	11	.	3	7	3	139	.	3	7	3
75	.	3	281	3	.	13	7	113	3	.	3	17	7	3	11	3	103	23	.	.
976	7	11	.	.	3	.	3	31	41	3	233	3	17	89	163	251	3	7	3	.
77	3	41	3	199	.	3	19	3	13	79	7	.	3	17	3	43	7	3	13	3
78	11	3	47	3	7	.	29	23	3	11	3	.	19	3	227	3	.	.	.	.
79	47	13	19	7	3	179	3	.	181	3	.	3	.	11	7	37	3	.	3	41
80	3	23	3	.	.	3	.	3	7	83	61	167	3	13	3	17	.	3	.	3
981	.	3	17	3	13	41	59	7	3	.	3	.	11	3	13	3	17	.	7	61
82	283	7	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	7	23	193	31	3	17	3	19
83	3	197	3	37	17	3	.	3	.	.	.	7	3	107	3	29	43	3	.	3
84	19	3	.	3	.	7	11	.	3	13	3	.	257	3	173	3	7	.	17	13
85	13	137	.	23	3	29	3	.	83	3	11	3	37	.	211	7	3	.	3	11
986	3	151	3	7	31	3	17	3	.	7	.	19	3	53	3	.	.	3	23	3
87	89	3	7	3	.	.	.	17	3	269	3	.	.	3	.	3	293	19	11	7
88	.	29	.	.	3	11	3	7	17	3	37	3	23	7	.	13	3	97	3	.
89	3	7	3	.	.	3	7	3	31	11	.	.	3	19	3	.	163	3	.	3
90	7	3	181	3	11	.	.	83	3	.	3	7	167	3	97	3	.	7	13	37
991	113	.	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	.	.	3	11	3	.
92	3	13	3	11	7	3	47	3	313	.	67	13	3	.	3	7	.	3	61	3
93	199	3	13	3	47	19	.	11	3	7	3	71	17	3	7	3	11	41	.	.
94	.	107	7	.	3	89	3	37	7	3	19	3	.	17	13	.	3	277	3	7
95	3	19	3	151	191	3	11	3	23	.	.	.	3	7	3	11	13	3	7	3
996	103	3	.	3	.	23	7	13	3	.	3	67	7	3	17	3	37	.	251	11
97	7	179	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	19	.	11	17	3	7	3	13
98	3	11	3	.	151	3	.	3	173	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
99	.	3	.	3	7	11	41	163	3	.	3	.	13	3	37	3	139	17	89	127
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
961	11	3	.	3	13	23	.	17	3	7	3	.	.	3	7	3	43	29	19	.
62	29	101	7	.	3	.	3	.	7	3	43	3	.	11	73	.	3	.	3	7
63	3	.	3	167	173	3	29	3	11	17	.	31	3	7	3	113	41	3	7	3
64	.	3	.	3	.	19	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	47	.	.	13
65	7	.	.	223	3	61	3	11	269	3	13	3	.	59	.	.	3	7	3	29
966	3	19	3	163	.	3	.	3	.	277	7	11	3	109	3	31	7	3	.	3
67	31	3	.	3	7	.	11	.	3	29	3	.	17	3	.	3	151	43	.	.
68	.	23	.	7	3	13	3	157	73	3	11	3	19	17	7	13	3	.	3	11
69	3	.	3	.	47	3	13	3	7	.	37	.	3	293	3	.	23	3	.	3
70	37	3	71	3	31	29	113	7	3	.	3	193	.	3	17	3	79	151	7	89
971	.	7	.	.	3	11	3	.	.	3	.	3	7	157	.	17	3	83	3	37
72	3	13	3	.	19	3	23	3	211	11	89	7	3	.	3	271	17	3	149	3
73	67	3	13	3	11	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	173
74	19	.	41	.	3	.	3	29	11	3	107	3	43	71	13	7	3	11	3	.
75	3	.	3	7	.	3	43	3	.	7	.	.	3	.	3	23	13	3	17	3
976	.	3	7	3	61	127	101	11	3	.	3	19	23	3	.	3	11	211	151	7
77	239	67	11	29	3	59	3	7	.	3	.	3	277	7	.	.	3	19	3	13
78	3	7	3	.	.	3	7	3	.	97	13	.	3	.	3	11	53	3	223	3
79	7	3	23	3	.	163	.	313	3	.	3	7	13	3	.	3	29	7	43	11
80	71	31	.	13	3	7	3	281	101	3	7	3	.	43	11	47	3	233	3	263
981	3	11	3	103	7	3	89	3	127	19	31	.	3	47	3	7	149	3	11	3
82	.	3	.	3	97	11	13	.	3	7	3	23	29	3	7	3	227	13	.	.
83	11	59	7	41	3	19	3	.	7	3	.	3	131	37	.	.	3	61	3	7
84	3	.	3	.	11	3	.	3	59	.	19	.	3	7	3	149	.	3	7	3
85	139	3	67	3	.	.	7	241	3	.	3	13	7	3	311	3	19	11	.	43
986	7	47	13	11	3	.	3	.	79	3	101	3	11	13	29	.	3	7	3	229
87	3	17	3	61	13	3	283	3	43	.	7	.	3	173	3	223	7	3	31	3
88	41	3	11	3	7	109	.	.	3	.	3	11	61	3	.	3	13	.	.	.
89	53	.	17	7	3	.	3	13	19	3	29	3	.	31	7	11	3	.	3	.
90	3	.	3	17	23	3	157	3	7	13	11	.	3	.	3	.	197	3	41	3
991	13	3	229	3	17	53	131	7	3	.	3	41	.	3	11	3	.	281	7	19
92	.	7	.	.	3	17	3	53	37	3	.	3	7	101	43	.	3	31	3	109
93	3	73	3	13	67	3	.	3	.	43	.	7	3	23	3	19	.	3	.	3
94	11	3	271	3	79	7	17	.	3	11	3	31	53	3	.	3	7	37	.	29
95	.	113	29	.	3	.	3	17	.	3	.	3	.	11	53	7	3	13	3	137
996	3	227	3	7	.	3	.	3	11	7	263	.	3	83	3	.	131	3	13	3
97	23	3	7	3	.	67	.	19	3	17	3	113	11	3	.	3	73	.	23	7
98	31	13	61	.	3	37	3	7	.	3	.	3	.	7	59	23	3	191	3	283
99	3	7	3	19	.	3	7	3	.	257	17	11	3	13	3	.	.	3	19	3
N	51	35	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

Tavola degli Archi Circolari ridotti in parti del Raggio = I.

Gradi				
1° =	0,01745	32925	19943	29577
2	0,03490	65850	39886	59154
3	0,05235	98775	59829	88731
4	0,06981	31700	79773	18308
5	0,08726	64625	99716	47885
6	0,10471	97551	19659	77462
7	0,12217	30476	39603	07038
8	0,13962	63401	59546	36615
9	0,15707	96326	79489	66192
10	0,17453	29251	99432	95769
11	0,19198	62177	19376	25346
12	0,20943	95102	39319	54923
13	0,22689	28027	59262	84500
14	0,24434	60952	79206	14077
15	0,26179	93877	99149	43654
16	0,27925	26803	19092	73231
17	0,29670	59728	39036	02808
18	0,31415	92653	58979	32385
19	0,33161	25578	78922	61962
20	0,34906	58503	98865	91538
21	0,36651	91429	18809	21115
22	0,38397	24354	38752	50692
23	0,40142	57279	58695	80269
24	0,41887	90204	78639	09846
25	0,43633	23129	98582	39423
26	0,45378	56055	18525	69000
27	0,47123	88980	38468	98577
28	0,48869	21905	58412	28154
29	0,50614	54830	78355	57731
30	0,52359	87755	98298	87308
31	0,54105	20681	18242	16885
32	0,55850	53606	38185	46462
33	0,57595	86531	58128	76038
34	0,59341	19456	78072	05615
35	0,61086	52381	98015	35192
36	0,62831	85307	17958	64769
37	0,64577	18232	37901	94346
38	0,66322	51157	57845	23923
39	0,68067	84082	77788	53500
40	0,69813	17007	97731	83077
41	0,71558	49933	17675	12654
42	0,73303	82858	37618	42231
43	0,75049	15783	57561	71808
44	0,76794	48708	77505	01385
45	0,78539	81633	97448	30962

Gradi				
46° =	0,80285	14559	17391	60538
47	0,82030	47484	37334	90115
48	0,83775	80409	57278	19692
49	0,85521	13334	77221	49269
50	0,87266	46259	97164	78846
51	0,89011	79185	17108	08423
52	0,90757	12110	37051	38000
53	0,92502	45035	56994	67577
54	0,94247	77960	76937	97154
55	0,95993	10885	96881	26731
56	0,97738	43811	16824	56308
57	0,99483	76736	36767	85885
58	1,01229	09661	56711	15462
59	1,02974	42586	76654	45038
60	1,04719	75511	96597	74615
61	1,06465	08437	16541	04192
62	1,08210	41362	36484	33769
63	1,09955	74287	56427	63346
64	1,11701	07212	76370	92923
65	1,13446	40137	96314	22500
66	1,15191	73063	16257	52077
67	1,16937	05988	36200	81654
68	1,18682	38913	56144	11231
69	1,20427	71838	76087	40808
70	1,22173	04763	96030	70385
71	1,23918	37689	15973	99962
72	1,25663	70614	35917	29539
73	1,27409	03539	55860	59115
74	1,29154	36464	75803	88692
75	1,30899	69389	95747	18269
76	1,32645	02315	15690	47846
77	1,34390	35240	35633	77423
78	1,36135	68165	55577	07000
79	1,37881	01090	75520	36577
80	1,39626	34015	95463	66154
81	1,41371	66941	15406	95731
82	1,43116	99866	35350	25308
83	1,44862	32791	55293	54885
84	1,46607	65716	75236	84462
85	1,48352	98641	95180	14039
86	1,50098	31567	15123	43615
87	1,51843	64492	35066	73192
88	1,53588	97417	55010	02769
89	1,55334	30342	74953	32346
90	1,57079	63267	94896	61923

Minuti				
1′ =	0,00029	08882	08665	72160
2	0,00058	17764	17331	44319
3	0,00087	26646	25997	16479
4	0,00116	35528	34662	88638
5	0,00145	44410	43328	60798
6	9,00174	53292	51994	32958
7	0,00203	62174	60660	05117
8	0,00232	71056	69325	77277
9	0,00261	79938	77991	49437
10	0,00290	88820	86657	21596
20	0,00581	77641	73314	43192
30	0,00872	66462	59971	64788
40	0,01163	55283	46628	86385
50	0,01454	44104	33286	07981
60	0,01745	32925	19943	29577

Secondi				
1″ =	0,00000	48481	36811	09536
2	0,00000	96962	73622	19072
3	0,00001	45444	10433	28608
4	0,00001	93925	47244	38144
5	0,00002	42406	84055	47680
6	0,00002	90888	20866	57216
7	0,00003	39369	57677	66752
8	0,00003	87850	94488	76288
9	0,00004	36332	31299	85824
10	0,00004	84813	68110	95360
20	0,00009	69627	36221	90720
30	0,00014	54441	04332	86080
40	0,00019	39254	72443	81440
50	0,00024	24068	40554	76800
60	0,00029	08882	08665	72160

TAVOLA

DELLE POTENZE DEI NUMERI

che abbraccia
le prime tre fino a 2000
le prime sei fino a 300
e le prime dieci fino a 60

N	N^8	N^9	N^{10}
1	1	1	1
2	256	512	1024
3	6561	19683	59049
4	65536	262144	1048576
5	390625	1953125	9765625
6	1679616	10077696	60466176
7	5764801	40353607	282475249
8	16777216	134217728	1073741824
9	43046721	387420489	3486784401
10	100000000	1000000000	10000000000
11	214358881	2357947691	25937424601
12	429981696	5159780352	61917374224
13	815730721	10604499373	137858491849
14	1475789056	20661046784	289254654976
15	2562890625	38443359375	576650390625
16	4294967296	68719476736	1099511627776
17	6975757441	118587876497	2015993900449
18	11019960576	198359290368	3570467226624
19	16983563041	322687697779	6131066257801
20	25600000000	512000000000	10240000000000
21	37822859361	794280046581	16679880978201
22	54875873536	1207269217792	26559922791424
23	78310985281	1801152661463	41426511213649
24	110075314176	2641807540224	63403380965376
25	152587890625	3814697265625	95367431640625
26	208827064576	5429503678976	141167095653370
27	282429536481	7625597484987	205891132094649
28	377801998336	10578455953408	296196766695424
29	500246412961	14507145975869	420707233300201
30	656100000000	19683000000000	590490000000000
31	852891037441	26439622160671	819628286980801
32	1099511627776	35184372088832	1125899906842624
33	1406408618241	46411484401953	1531578985264449
34	1785793904896	60716992766464	2064377754059776
35	2251875390625	78815638671875	2758547353515625
36	2821109907456	101559956668416	3656158440062976
37	3512479453921	129961739795077	4808584372417849
38	4347792138496	165216101262848	6278211847988224
39	5352009260481	208728361158759	8140406085191601
40	6553600000000	262144000000000	10485760000000000
41	7984925229121	327381934393961	13422659310152401
42	9682651996416	406671383849472	17080198121677824
43	11688200277601	502592611936843	21611482313284249
44	14048223625216	618121839509504	27197360938418176
45	16815125390625	756680642578125	34050628916015625
46	20047612231936	922190162669056	42420747482776576
47	23811286661761	1119130473102767	52599132235830049
48	28179280429056	1352605460594688	64925062108545024
49	33232930569601	1628413597910449	79792266267612001
50	39062500000000	1953125000000000	97656250000000000
51	45767944570401	2334165173090451	119042423827613001
52	53459728531456	2779905883635712	144555105949057024
53	62259690411361	3299763591802133	174887470365513049
54	72301961339136	3904305912313344	210832519264920576
55	83733937890625	4605366583984375	253295162119140625
56	96717311574016	5416169448144896	303305489096114176
57	111429157112001	6351461955384057	362033331456891249
58	128063081718016	7427658739644928	430804206899405824
59	146830437604321	8662995818654949	511116753300641401
60	167961600000000	10077696000000000	604661760000000000
N	N^8	N^9	N^{10}

N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
3721	226981	13845841	844596301	51520374361
3844	238328	14776336	916132832	56800235584
3969	250047	15752961	992436543	62523502209
4096	262144	16777216	1073741824	68719476736
4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
4356	287496	18974736	1252332576	82653950016
4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
4900	343000	24010000	1680700000	117649000000
5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
5184	373248	26873856	1934917632	139314069504
5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
6084	474552	37015056	2887174368	225199600704
6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
6724	551368	45212176	3707398432	304006671424
6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
7921	704969	62742241	5584059449	496981290961
8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
8649	804357	74805201	6956883693	646990183449
8836	830584	78074896	7339040224	689869781056
9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
9216	884736	84934656	8153726976	782757789696
9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000
10201	1030301	104060401	10510100501	1061520150601
10404	1061208	108243216	11040808032	1126162419264
10609	1092727	112550881	11592740743	1194052296529
10816	1124864	116985856	12166529024	1265319018496
11025	1157625	121550625	12762815625	1340095640625
11236	1191016	126247696	13382255776	1418519112256
11449	1225043	131079601	14025517307	1500730351849
11664	1259712	136048896	14693280768	1586874322944
11881	1295029	141158161	15386239549	1677100110841
12100	1331000	146410000	16105100000	1771561000000
12321	1367631	151807041	16850581551	1870414552161
12544	1404928	157351936	17623416832	1973822685184
12769	1442897	163047361	18424351793	2081951752609
12996	1481544	168896016	19254145824	2194972623936
13225	1520875	174900625	20113571875	2313060765625
13456	1560896	181063936	21003416576	2436396322816
13689	1601613	187388721	21924480357	2565164201769
13924	1643032	193877776	22877577568	2699554153024
14161	1685159	200533921	23863536599	2839760855281
14400	1728000	207360000	24883200000	2985984000000
N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
121	14641	1771561	214358881	25937424601	3138428376721
22	14884	1815848	221533456	27027081632	3297303959104
23	15129	1860867	228886641	28153056843	3462825991689
24	15376	1906624	236421376	29316250624	3635215077376
25	15625	1953125	244140625	30517578125	3814697265625
126	15876	2000376	252047376	31757969376	4001504141376
27	16129	2048383	260144641	33038369407	4195872914689
28	16384	2097152	268435456	34359738368	4398046511104
29	16641	2146689	276922881	35723051649	4608273662721
30	16900	2197000	285610000	37129300000	4826809000000
131	17161	2248091	294499921	38579489651	5053913144281
32	17424	2299968	303595776	40074642432	5289852801024
33	17689	2352637	312900721	41615795893	5534900853769
34	17956	2406104	322417936	43204003424	5789336458816
35	18225	2460375	332150625	44840334375	6053445140625
136	18496	2515456	342102016	46525874176	6327518887936
37	18769	2571353	352275361	48261724457	6611856250609
38	19044	2628072	362673936	50046003198	6906762437184
39	19321	2685619	373301041	51888844699	7212549413161
40	19600	2744000	384160000	53782400000	7529536000000
141	19881	2803221	395254161	55730830701	7858047974841
42	20164	2863288	406586896	57735339232	8198418170944
43	20449	2924207	418161601	59797108943	8550986578849
44	20736	2985984	429981696	61917364224	8916100448256
45	21025	3048625	442050625	64097340625	9294114390625
146	21316	3112136	454371856	66338290976	9685390482496
47	21609	3176523	466948881	68641485507	10090298369529
48	21904	3241792	479785216	71008211968	10509215371264
49	22201	3307949	492884401	73439775749	10942526586601
50	22500	3375000	506250000	75937500000	11390625000000
151	22801	3442951	519885601	78502725751	11853911588401
52	23104	3511808	533794816	81136812032	12332795428864
53	23409	3581577	547981281	83841135993	12827693806929
54	23716	3652264	562448656	86617093024	13339032325696
55	24025	3723875	577200625	89466096875	13867245015625
156	24336	3796416	592240896	92389579776	14412774445056
57	24649	3869893	607573201	95388992557	14976071831449
58	24964	3944312	623201296	98465804768	15557597153344
59	25281	4019679	639128961	101621504799	16157819263041
60	25600	4096000	655360000	104857600000	16777216000000
161	25921	4173281	671898241	108175616801	17416274304961
62	26244	4251528	688747536	111577100832	18075490334784
63	26569	4330747	705911761	115063617043	18755369578009
64	26896	4410944	723394816	118636749824	19456426971136
65	27225	4492125	741200625	122298103125	20179187015625
166	27556	4574296	759333136	126049300576	20924183895616
67	27889	4657463	777796321	129891985607	21691961596369
68	28224	4741632	796594176	133827821568	22483074023424
69	28561	4826809	815730721	137858491849	23298085122481
70	28900	4913000	835210000	141985700000	24137569000000
171	29241	5000211	855036081	146211169851	25002110044521
72	29584	5088448	875213056	150536645632	25892303048704
73	29929	5177717	895745041	154963892093	26808753332089
74	30276	5268024	916636176	159494694624	27752076864576
75	30625	5359375	937890625	164130859375	28722900390625
176	30976	5451776	959512576	168874213376	29721861554176
77	31329	5545233	981506241	173726604657	30749609024289
78	31684	5639752	1003875856	178689902368	31806802621504
79	32041	5735339	1026625681	183765996899	32894113444921
80	32400	5832000	1049760000	188956800000	34012224000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
181	32761	5929741	1073283121	194264244901	35161828327081
82	33124	6028568	1097199376	199690286432	36343632130624
83	33489	6128487	1121513121	205236901143	37558352909169
84	33856	6229504	1146228736	210906087424	38806720086016
85	34225	6331625	1171350625	216699865625	40089475140625
186	34596	6434856	1196883216	222620278176	41407371740736
87	34969	6539203	1222830961	228669389707	42761175875209
88	35344	6644672	1249198336	234849287168	44151665987584
89	35721	6751269	1275989841	241162079949	45579633110361
90	36100	6859000	1303210000	247609900000	47045881000000
191	36481	6967871	1330863361	254194901951	48551226272641
92	36864	7077888	1358954496	260919263232	50096498540544
93	37249	7189057	1387488001	267785184193	51682540549249
94	37636	7301384	1416468496	274794888224	53310208315456
95	38025	7414875	1445900625	281950621875	54980371265625
196	38416	7529536	1475789056	289254654976	56693912375296
97	38809	7645373	1506138481	296709280757	58451728309129
98	39204	7762392	1536953616	304316815968	60254729561664
99	39601	7880599	1568239201	312079600999	62103840598801
200	40000	8000000	1600000000	320000000000	64000000000000
201	40401	8120601	1632240801	328080401001	65944160601201
02	40804	8242408	1664966416	336323216032	67937289638464
03	41209	8365427	1698181681	344730881243	69980368892329
04	41616	8489664	1731891456	353305857024	72074394832896
05	42025	8615125	1766100625	362050628125	74220378765625
206	42436	8741816	1800814096	370967703776	76419346977856
07	42849	8869743	1836036801	380059617807	78672340886049
08	43264	8998912	1871773696	389328928768	80980417183744
09	43681	9129329	1908029761	398778220049	83344647990241
10	44100	9261000	1944810000	408410100000	85766121000000
211	44521	9393931	1982119441	418227202051	88245939632761
12	44944	9528128	2019963136	428232184832	90785223184384
13	45369	9663597	2058346161	438427732293	93385106978409
14	45796	9800344	2097273616	448816553824	96046742518336
15	46225	9938375	2136750625	459401384375	98771297640625
216	46656	10077696	2176782336	470184984576	101559956668416
17	47089	218313	2217373921	481170140857	4413920565969
18	47524	360232	2258530576	492359665568	7334407093824
19	47961	503459	2300257521	503756397099	110322650964681
20	48400	648000	2342560000	515363200000	3379904000000
221	48841	10793861	2385443281	527182965101	116507435287321
22	49284	941048	2428912656	539218609632	9706531328304
23	49729	11089567	2472973441	551473077343	122978496247489
24	50176	239424	2517630976	563949338624	6324651851776
25	50625	390625	2562890625	576650390625	9746337890625
226	51076	11543176	2608757776	589579257376	133244912166976
27	51529	697083	2655237841	602738989907	6821750709889
28	51984	852352	2702336256	616132666368	140478247931904
29	52441	12008989	2750058481	629763392149	4215816802121
30	52900	167000	2798410000	643634300000	8035889000000
231	53361	12326391	2847396321	657748550151	151939915084881
32	53824	487168	2897022976	672109330432	5929364660224
33	54289	649337	2947295521	686719856393	160005726539569
34	54756	812904	2998219536	701583371424	4170508913216
35	55225	977875	3049800625	716703146875	8425239515625
236	55696	13144256	3102044416	732082482176	172771465793536
37	56169	312053	3154956561	747724704957	7210755074809
38	56644	481272	3208542736	763633171168	181744694737984
39	57121	651919	3262808641	779811265199	6374892382561
40	57600	824000	3317760000	796262400000	191102976000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
241	58081	13997521	3373402561	812990017201	195930594145441
42	58564	14172488	3429742096	829997587232	200859416110144
43	59049	348907	3486784401	847288609443	205891132094649
44	59536	526784	3544535296	864866612224	211027453382050
45	60025	706125	3603000625	882735153125	216270112515625
246	60516	14886936	3662186256	900897818976	221620863468096
47	61009	15069223	3722098081	919358226007	227081481823729
48	61504	252992	3782742016	938120019968	232653764952064
49	62001	438249	3844124001	957186876249	238339532186001
50	62500	625000	3906250000	976562500000	244140625000000
251	63001	15813251	3969126001	996250626251	250058907189001
52	63504	16003008	4032758016	1016255020032	256096265048064
53	64009	194277	4097152081	36579476493	262254607552729
54	64516	387064	4162314256	57227821024	268535866540096
55	65025	581375	4228250625	78203909375	274941996890625
256	65536	16777216	4294967296	1099511627776	281474976710656
57	66049	974593	4362470401	1121154893057	288136807515649
58	66564	17173512	4430766096	43137652768	294929514414144
59	67081	373979	4499860561	65463885299	301855146292441
60	67600	576000	4569760000	88137600000	308915776000000
261	68121	17779581	4640470641	1211162837301	316113500535561
62	68644	984728	4711998736	34543608832	323450441233984
63	69169	18191447	4784350561	58284197543	330928743953809
64	69696	399744	4857532416	82388557824	338550579265536
65	70225	609625	4931550625	1306860915625	346318142640625
266	70756	18821096	5006411536	1331705468576	354233654641216
67	71289	19034163	5082121521	56926446107	362299361110569
68	71824	248832	5158686976	82528109568	370517533364224
69	72361	465109	5236114321	1408514752349	378890468381881
70	72900	683000	5314410000	34890700000	387420489000000
271	73441	19902511	5393580481	1461660310351	396109944105121
72	73984	20123648	5473632256	88827973632	404961208827904
73	74529	346417	5554571841	1516398112593	413976684737889
74	75076	570824	5636405776	44375182624	423158800038976
75	75625	796875	5719140625	72763671875	432510009765625
276	76176	21024576	5802782976	1601568101376	442032795979776
77	76729	253933	5887339441	30793025157	451729667968489
78	77284	484952	5972816656	60443030368	461603162442304
79	77841	717639	6059221281	90522737399	471655843734321
80	78400	952000	6146560000	1721036800000	481890304000000
281	78961	22188041	6234839521	1751989905401	492309163417681
82	79524	425768	6324066576	83386774432	502915070389824
83	80089	665187	6414247921	1815232161643	513710701744969
84	80656	906304	6505390336	47530855424	524698762940416
85	81225	23149125	6597500625	80287678125	535881988265625
286	81796	23393656	6690585616	1913507486176	547263141046336
87	82369	639903	6784652161	47195170207	558845013849409
88	82944	887872	6879707136	81355655168	570630428688384
89	83521	24137569	6975757441	2015993900449	582622237229761
90	84100	389000	7072810000	51114900000	594823321000000
291	84681	24642171	7170871761	2086712682451	607236591593241
92	85264	897088	7269949696	2122825311232	619864990879744
93	85849	25153757	7370050801	59424884693	632711491215049
94	86436	412184	7471182096	96527536224	645779095649856
95	87025	672375	7573350625	2234138434375	659072838140625
296	87616	25934336	7676563456	2272262782976	672589783760896
97	88209	26198073	7780827681	2310905821257	686339028913329
98	88804	463592	7886150416	50072823968	700321701542464
99	89401	730899	7992538801	89769101499	714540961348201
300	90000	27000000	8100000000	2430000000000	729000000000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
301	90601	27270901	361	130321	47045881	421	177241	74618461
02	91204	543608	62	1044	437928	22	8084	75151448
03	91809	818127	63	1769	832147	23	8929	75686967
04	92416	28094464	64	2496	48228544	24	9776	76225024
05	93025	372625	65	3225	627125	25	180625	76765625
306	93636	28652616	366	133956	49027896	426	181476	77308776
07	94249	934443	67	4689	430863	27	2329	77854483
08	94864	29218112	68	5424	836032	28	3184	78402752
09	95481	503629	69	6161	50243409	29	4041	78953589
10	96100	791000	70	6900	653000	30	4900	79507000
311	96721	30080231	371	137641	51064811	431	185761	80062991
12	97344	371328	72	8384	478848	32	6624	80621568
13	97969	664297	73	9129	895117	33	7489	81182737
14	98596	959144	74	9876	52313624	34	8356	81746504
15	99225	31255875	75	140625	734375	35	9225	82312875
316	99856	31554496	376	141376	53157376	436	190096	82881856
17	100489	855013	77	2129	582633	37	0969	83453453
18	1124	32157432	78	2884	54010152	38	1844	84027672
19	1761	461759	79	3641	439939	39	2721	84604519
20	2400	768000	80	4400	872000	40	3600	85184000
321	103041	33076161	381	145161	55306341	441	194481	85766121
22	3684	386248	82	5924	742968	42	5364	86350888
23	4329	698267	83	6689	56181887	43	6249	86938307
24	4976	34012224	84	7456	623104	44	7136	87528384
25	5625	328125	85	8225	57066625	45	8025	88121125
326	106276	34645976	386	148996	57512456	446	198916	88716536
27	6929	965783	87	9769	960603	47	9809	89314623
28	7584	35287552	88	150544	58411072	48	200704	89915392
29	8241	611289	89	1321	863869	49	1601	90518849
30	8900	937000	90	2100	59319000	50	2500	91125000
331	109561	36264691	391	152881	59776471	451	203401	91733851
32	110224	594368	92	3664	60236288	52	4304	92345408
33	0889	926037	93	4449	698457	53	5209	92959677
34	1556	37259704	9	5236	61162984	54	6116	93576664
35	2225	595375	95	6025	629875	55	7025	94196375
336	112896	37933056	396	156816	62099136	456	207936	94818816
37	3569	38272753	97	7609	570773	57	8849	95443993
38	4244	614472	98	8404	63044792	58	9764	96071912
39	4921	958219	99	9201	521199	59	210681	96702579
40	5600	39304000	400	160000	64000000	60	1600	97336000
341	116281	39651821	401	160801	64481201	461	212521	97972181
42	6964	40001688	02	1604	964808	62	3444	98611128
43	7649	353607	03	2409	65450827	63	4369	99252847
44	8336	707584	04	3216	939264	64	5296	99897344
45	9025	41063625	05	4025	66430125	65	6225	100544625
346	119716	41421736	406	164836	66923416	466	217156	101194696
47	120409	781923	07	5649	67419143	67	8089	1847563
48	1104	42144192	08	6464	917312	68	9024	2503232
49	1801	508549	09	7281	68417929	69	9961	3161709
50	2500	875000	10	8100	921000	70	220900	3823000
351	123201	43243551	411	168921	69426531	471	221841	104487111
52	3904	614208	12	9744	934528	72	2784	5154048
53	4609	986977	13	170569	70444997	73	3729	5823817
54	5316	44361864	14	1396	957944	74	46 6	6496424
55	6025	738874	15	2225	71473375	75	5625	7171875
356	126736	45118016	416	173056	71991296	476	226576	107850176
57	7449	499293	17	3889	72511713	77	7529	8531333
58	8164	882712	18	4724	73034632	78	8484	9215352
59	8881	46268279	19	5561	560059	79	9441	9902239
60	9600	656000	20	6400	74088000	80	230400	110592000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
481	231361	111284641	541	292681	158340421	601	361201	217081801
82	2324	1980168	42	3764	9220088	02	2404	8167208
83	3289	2678587	43	4849	160103007	03	3609	9256227
84	4256	3379904	44	5936	0989184	04	4816	220348864
85	5225	4084125	45	7025	1878625	05	6025	1445125
486	236196	114791256	546	298116	162771336	606	367236	222545016
87	7169	5501303	47	9209	3667323	07	8449	3648543
88	8144	6214272	48	300304	4566592	08	9664	4755712
89	9121	6930169	49	1401	5469149	09	370881	5866529
90	240100	7649000	50	2500	6375000	10	2100	6981000
491	241081	118370771	551	303601	167284151	611	373321	228099131
92	2064	9095488	52	4704	8196608	12	4544	9220928
93	3049	9823157	53	5809	9112377	13	5769	230346397
94	4036	120553784	54	6916	170031464	14	6996	1475544
95	5025	1287375	55	8025	0953875	15	8225	2608375
496	246016	122023936	556	309136	171879616	616	379456	233744896
97	7009	2763473	57	310249	2808693	17	380689	4885213
98	8004	3505992	58	1364	3741112	18	1924	6029032
99	9001	4251499	59	2481	4676879	19	3161	7176659
500	250000	5000000	60	3600	5616000	20	4400	8328000
501	251001	125751501	561	314721	176558481	621	385641	239483061
02	2004	6506008	62	5844	7504328	22	6884	240641848
03	3009	7263527	63	6969	8453547	23	8129	1804367
04	4016	8024064	64	8096	9406144	24	9376	2970624
05	5025	8787625	65	9225	180362125	25	390625	4140625
506	256036	129554216	566	320356	181321496	626	391876	245314376
07	7049	130323843	67	1489	2284263	27	3129	6491883
08	8064	1096512	68	2624	3250432	28	4384	7673152
09	9081	1872229	69	3761	4220009	29	5641	8858189
10	260100	2651000	70	4900	5193000	30	6900	250047000
511	261121	133432831	571	326041	186169411	631	398161	251239591
12	2144	4217728	72	7184	7149248	32	9424	2435968
13	3169	5005697	73	8329	8132517	33	400689	3636137
14	4196	5796744	74	9476	9119224	34	1956	4840104
15	5225	6590875	75	330625	190109375	35	3225	6047875
516	266256	137388096	576	331776	191102976	636	404496	257259456
17	7289	8188413	77	2929	2100033	37	5769	8474853
18	8324	8991832	78	4084	3100552	38	7044	9694072
19	9361	9798359	79	5241	4104539	39	8321	260917119
20	270400	140608000	80	6400	5112000	40	9600	2144000
521	271441	141420761	581	337561	196122941	641	410881	263374721
22	2484	2236648	82	8724	7137368	42	2164	4609288
23	3529	3055667	83	9889	8155287	43	3449	5847707
24	4576	3877824	84	341056	9176704	44	4736	7089984
25	5625	4703125	85	2225	200201625	45	6025	8336125
526	276676	145531576	586	343396	201230056	646	417316	269586136
27	7729	6363183	87	4569	2262003	47	8609	270840023
28	8784	7197952	88	5744	3297472	48	9904	2097792
29	9841	8035889	89	6921	4336469	49	421201	3359449
30	280900	8877000	90	8100	5379000	50	2500	4625000
531	281961	149721291	591	349281	206425071	651	423801	275894451
32	3024	150568768	92	350464	7474688	52	5104	7167808
33	4089	1419437	93	1649	8527857	53	6409	8445077
34	5156	2273304	94	2836	9584584	54	7716	9726264
35	6225	3130375	95	4025	210644875	55	9025	281011375
536	287296	153990656	596	355216	211708736	656	430336	282300416
37	8369	4854153	97	6409	2776173	57	1649	3593393
38	9444	5720872	98	7604	3847192	58	2964	4890312
39	290521	6590819	99	8801	4921799	59	4281	6191179
40	1600	7164000	600	360000	6000000	60	5600	7496000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
661	436921	288804781	721	519841	374805361	781	609961	476379541
62	8244	290117528	22	521284	6367048	82	611524	8211768
63	9569	1434247	23	2729	7933067	83	3089	480048687
64	440896	2754944	24	4176	9503424	84	4656	1890304
65	2225	4079625	25	5625	381078125	85	6225	3736625
666	443556	295408296	726	527076	382657176	786	617796	485587656
67	4889	6740963	27	8529	4240583	87	9369	7443403
68	6224	8077632	28	9984	5828352	88	620944	9303872
69	7561	9418309	29	531441	7420489	89	2521	491169069
70	8900	300763000	30	2900	9017000	90	4100	3039000
671	450241	302111711	731	534361	390617891	791	625681	494913671
72	1584	3464448	32	5824	2223168	92	7264	6793088
73	2929	4821217	33	7289	3832837	93	8849	8677257
74	4276	6182024	34	8756	5446904	94	630436	500566184
75	5625	7546875	35	540225	7065375	95	2025	2459875
676	456976	308915776	736	541696	398688256	796	633616	504358336
77	8329	310288733	37	3169	400315553	97	5209	6261573
78	9684	1665752	38	4644	1947272	98	6804	8169592
79	461041	3046839	39	6121	3583419	99	8401	510082399
80	2400	4432000	40	7600	5224000	800	640000	2000000
681	463761	315821241	741	549081	406869021	801	641601	513922401
82	5124	7214568	42	550564	8518488	02	3204	5849608
83	6489	8611987	43	2049	410172407	03	4809	7781627
84	7856	320013504	44	3536	1830784	04	6416	9718464
85	9225	1419125	45	5025	3493625	05	8025	521660125
686	470596	322828856	746	556516	415160936	806	649636	523606616
87	1969	4242703	47	8009	6832723	07	651249	5557943
88	3344	5660672	48	9504	8508992	08	2864	7514112
89	4721	7082769	49	561001	420189749	09	4481	9475129
90	6100	8509000	50	2500	1875000	10	6100	531441000
691	477481	329939371	751	564001	423564751	811	657721	533411731
92	8864	331373888	52	5504	5259008	12	9344	5387328
93	480249	2812557	53	7009	6957777	13	660969	7367797
94	1636	4255384	54	8516	8661064	14	2596	9353144
95	3025	5702375	55	570025	430368875	15	4225	541343375
696	484416	337153536	756	571536	432081216	816	665856	543338496
97	5809	8608873	57	3049	3798093	17	7489	5338513
98	7204	340068392	58	4564	5519512	18	9124	7343432
99	8601	1532099	59	6081	7245479	19	670761	9353259
700	490000	3000000	60	7600	8976000	20	2400	551368000
701	491401	344472101	761	579121	440711081	821	674041	553387661
02	2804	5948408	62	580644	2450728	22	5684	5412248
03	4209	7428927	63	2169	4194947	23	7329	7441767
04	5616	8913664	64	3696	5943744	24	8976	9476224
05	7025	350402625	65	5225	7697125	25	680625	561515625
706	498436	351895816	766	586756	449455096	826	682276	563559976
07	9849	3393243	67	8289	451217663	27	3929	5609283
08	501264	4894912	68	9824	2984832	28	5584	7663552
09	2681	6400829	69	591361	4756609	29	7241	9722789
10	4100	7911000	70	2900	6533000	30	8900	571787000
711	505521	359425431	771	594441	458314011	831	690561	573856191
12	6944	360944128	72	5984	460099648	32	2224	5930368
13	8369	2467097	73	7529	1889917	33	3889	8009537
14	9796	3994344	74	9076	3684824	34	5556	580093704
15	511225	5525875	75	600625	5484375	35	7225	2182875
716	512656	367061696	776	602176	467288576	836	698896	584277056
17	4089	8601813	77	3729	9097433	37	700569	6376253
18	5524	370146232	78	5284	470910952	38	2244	8480472
19	6961	1694959	79	6841	2729139	39	3921	590589719
20	8400	3248000	80	8400	4552000	40	5600	2704000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
841	707281	594823321	901	811801	731432701	961	923521	887503681
42	8964	6947688	02	3604	3870808	62	5444	890277128
43	710649	9077107	03	5409	6314327	63	7369	3056347
44	2336	601211584	04	7216	8763264	64	9296	5841344
45	4025	3351125	05	9025	741217625	65	931225	8632125
846	715716	605495736	906	820836	743677416	966	933156	901428696
47	7409	7645423	07	2649	6142643	67	5089	4231063
48	9104	9800192	08	4464	8613312	68	7024	7039232
49	720801	611960049	09	6281	751089429	69	8961	9853209
50	2500	4125000	10	8100	3571000	70	940900	912673000
851	724201	616295051	911	829921	756058031	971	942841	915498611
52	5904	8470208	12	831744	8550528	72	4784	8330048
53	7609	620650477	13	3569	761048497	73	6729	921167317
54	9316	2835864	14	5396	3551944	74	8676	4010424
55	731025	5026375	15	7225	6060875	75	950625	6859375
856	732736	627222016	916	839056	768575296	976	952576	929714176
57	4449	9422793	17	840889	771095213	77	4529	932574833
58	6164	631628712	18	2724	3620632	78	6484	5441352
59	7881	3839779	19	4561	6151559	79	8441	8313739
60	9600	6056000	20	6400	8688000	80	960400	941192000
861	741321	638277381	921	848241	781229961	981	962361	944076141
62	3044	640503928	22	850084	3777448	82	4324	6966168
63	4769	2735647	23	1929	6330467	83	6289	9862087
64	6496	4972544	24	3776	8889024	84	8256	952763904
65	8225	7214625	25	5625	791453125	85	970225	5671625
866	749956	649461896	926	857476	794022776	986	972196	958585256
67	751689	651714363	27	9329	6597983	87	4169	961504803
68	3424	3972032	28	861184	9178752	88	6144	4430272
69	5161	6234909	29	3041	801765089	89	8121	7361669
70	6900	8503000	30	4900	4357000	90	980100	970299000
871	758641	660776311	931	866761	806954491	991	982081	973242271
72	760384	3054848	32	8624	9557568	92	4064	6191488
73	2129	5338617	33	870489	812166237	93	6049	9146657
74	3876	7626624	34	2356	4780504	94	8036	982107784
75	5625	9921875	35	4225	7400375	95	990025	5074875
876	767376	672221376	936	876096	820025856	996	992016	988047936
77	9129	4526133	37	7969	2656953	97	4009	991026973
78	770884	6836152	38	9844	5293672	98	6004	4011992
79	2641	9151439	39	881721	7936019	99	8001	7002999
80	4400	681472000	40	3600	830584000	1000	1000000	1000000000
881	776161	683797841	941	885481	833237621	1001	1002001	1003003001
82	7924	6128968	42	7364	5896888	02	04004	06012008
83	9689	8465387	43	9249	8561807	03	06009	09027027
84	781456	690807104	44	891136	841232384	04	08016	12048064
85	3225	3154125	45	3025	3908625	05	10025	15075125
886	784996	695506456	946	894916	846590536	1006	1012036	1018108216
87	6769	7864103	47	6809	9278123	07	14049	21147343
88	8544	700227072	48	8704	851971392	08	16064	24192512
89	790321	2595369	49	900601	4670349	09	18081	27243729
90	2100	4969000	50	2500	7375000	10	20100	30301000
891	793881	707347971	951	904401	860085351	1011	1022121	1033364331
92	5664	9732288	52	6304	2801408	12	24144	36433728
93	7449	712121957	53	8209	5523177	13	26169	39509197
94	9236	4516984	54	910116	8250664	14	28196	42590744
95	801025	6917375	55	2025	870983875	15	30225	45678375
896	802816	719323136	956	913936	873722816	1016	1032256	1048772096
97	4609	721734273	57	5849	6467493	17	34289	51871913
98	6404	4150792	58	7764	9217912	18	36324	54977832
99	8201	6572699	59	9681	881974079	19	38361	58089859
900	810000	9000000	60	921600	4736000	20	40400	61208000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1021	1042441	1064332261	1081	1168561	1263214441	1141	1301881	1485446221
22	44484	67462048	82	70724	66723368	42	04164	89355288
23	46529	70599167	83	72889	70238787	43	06449	93271207
24	48576	73741824	84	75050	73760704	44	08736	97193984
25	50625	76890625	85	77225	77289125	45	11025	1501123625
1026	1052676	1080045576	1086	1179396	1280824056	1146	1313316	1505060136
27	54729	83206683	87	81569	84365503	47	15609	09003523
28	56784	86373952	88	83744	87913472	48	17904	12953792
29	58841	89547389	89	85921	91467969	49	20201	16910949
30	60900	92727000	90	88100	95029000	50	22500	20875000
1031	1062961	1095912791	1091	1190281	1298596571	1151	1324801	1524845951
32	65024	99104768	92	92464	1302170688	52	27104	28823808
33	67089	1102302937	93	94649	05751357	53	29409	32808577
34	69156	05507304	94	96836	04338584	54	31716	36800264
35	71225	08717875	95	99025	12932375	55	34025	40798875
1036	1073296	1111934656	1096	1201216	1316532736	1156	1336336	1544804416
37	75369	15157653	97	03409	20139673	57	38649	48816893
38	77444	18386872	98	05604	23753192	58	40964	52836312
39	79521	21622319	99	07801	27373299	59	43281	56862679
40	81600	24864000	1100	10000	31000000	60	45600	60896000
1041	1083681	1128111921	1101	1212201	1334633301	1161	1347921	1564936281
42	85764	31366088	02	14404	38273208	62	50244	68983528
43	87849	34626507	03	16609	41919727	63	52569	73037747
44	89936	37893184	04	18816	45572864	64	54896	77098944
45	92025	41166125	05	21025	49232625	65	57225	81167125
1046	1094116	1144445336	1106	1223236	1352899016	1166	1359556	1585242296
47	96209	47730823	07	25449	56572043	67	61889	89324463
48	98304	51022592	08	27664	60251712	68	64224	93413632
49	1100401	54320649	09	29881	63938029	69	66561	97509809
50	02500	57625000	10	32100	67631000	70	68900	1601613000
1051	1104601	1160935651	1111	1234321	1371330631	1171	1371241	1605723211
52	06704	64252608	12	36544	75036928	72	73584	09840448
53	08809	67575877	13	38769	78749897	73	75929	13964717
54	10916	70905464	14	40996	82469544	74	78276	18096024
55	13025	74241375	15	43225	86195875	75	80625	22234375
1056	1115136	1177583616	1116	1245456	1389928896	1176	1382976	1626379776
57	17249	80932193	17	47689	93668613	77	85329	30532233
58	19364	84287112	18	49924	97415032	78	87684	34691752
59	21481	87648379	19	52161	1401168159	79	90041	38858339
60	23600	91016000	20	54400	04928000	80	92400	43032000
1061	1125721	1194389981	1121	1256641	1408694561	1181	1394761	1647212741
62	27844	97770328	22	58884	12467848	82	97124	51400568
63	29969	1201157047	23	61129	16247867	83	99489	55595487
64	32096	04550144	24	63376	20034624	84	1401856	59797504
65	34225	07949625	25	65625	23828125	85	04225	64006625
1066	1136356	1211355496	1126	1267876	1427628376	1186	1406596	1668222856
67	38489	14767763	27	70129	31435383	87	08969	72446203
68	40624	18186432	28	72384	35249152	88	11344	76676672
69	42761	21611509	29	74641	39069689	89	13721	80914269
70	44900	25043000	30	76900	42897000	90	16100	85159000
1071	1147041	1228480911	1131	1279161	1446731091	1191	1418481	1689410871
72	49184	31925248	32	81424	50571968	92	20864	93669888
73	51329	35376017	33	83689	54419637	93	23249	97936057
74	53476	38833224	34	85956	58274104	94	25636	1702209384
75	55625	42296875	35	88225	62135375	95	28025	06489875
1076	1157776	1245766976	1136	1290496	1466003456	1196	1430416	1710777536
77	59929	49243533	37	92769	69878353	97	32809	15072373
78	62084	52726552	38	95044	73760072	98	35204	19374392
79	64241	56216039	39	97321	77648519	99	37601	23683599
80	66400	59712000	40	99600	81544000	1200	40000	28000000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
1201	1442401	1732323601	1261	1590121	2005142581	1321	1745041	2305199161
02	44804	36654408	62	92644	09916728	22	47684	10438248
03	47209	40992427	63	95169	14698447	23	50329	15685267
04	49616	45337664	64	97696	19487744	24	52976	20940224
05	52025	49690125	65	1600225	24284625	25	55625	26203125
1206	1454436	1754049816	1266	1602756	2029089090	1326	1758276	2331473976
07	56849	58416743	67	05289	33901163	27	60929	36752783
08	59264	62790912	68	07824	38720832	28	63584	42039552
09	61681	67172329	69	10361	43548109	29	66241	47334289
10	64100	71561000	70	12900	48383000	30	68900	52637000
1211	1466521	1775956931	1271	1615441	2053225511	1331	1771561	2357947691
12	68944	80360128	72	17984	58075648	32	74224	63266368
13	71369	84770597	73	20529	62933417	33	76889	68593037
14	73796	89188344	74	23076	67798824	34	79556	73927704
15	76225	93613375	75	25625	72671875	35	82225	79270375
1216	1478656	1798045696	1276	1628176	2077552576	1336	1784896	2384621056
17	81089	1802485313	77	30729	82440933	37	87569	89979753
18	83524	06932232	78	33284	87336952	38	90244	95346472
19	85961	11386459	79	35841	92240639	39	92921	2400721219
20	88400	15848000	80	38400	97152000	40	95600	06104000
1221	1490841	1820316861	1281	1640961	2102071041	1341	1798281	2411494821
22	93284	24793048	82	43524	06997768	42	1800964	16893688
23	95729	29276567	83	46089	11932187	43	03649	22302607
24	98176	33767424	84	48656	16874304	44	06336	27715584
25	1500625	38265625	85	51225	21824125	45	10025	33138625
1226	1503076	1842771176	1286	1653796	2126781656	1346	1812716	2438569736
27	05529	47284083	87	56369	31746903	47	15409	44008923
28	07984	51804352	88	58944	36719872	48	18104	49456192
29	10441	56331989	89	61521	41700569	49	20801	54911549
30	12900	60867000	90	64100	46689000	50	22500	60375000
1231	1515361	1865409391	1291	1666681	2151685171	1351	1825201	2465846551
32	17824	69959168	92	69264	56689088	52	27904	71326208
33	20289	74516337	93	71849	61700757	53	30609	76813977
34	22756	79080904	94	74436	66720184	54	33316	82309864
35	25225	83652875	95	77025	71747375	55	36025	87813875
1236	1527696	1888232256	1296	1679616	2176782336	1356	1838736	2493326016
37	30169	92819053	97	82209	81825073	57	41449	98846293
38	32644	97413272	98	84804	86875592	58	44164	2504374712
39	35121	1902014919	99	87401	91933899	59	46881	09911279
40	37600	06624000	1300	90000	97000000	60	49600	15456000
1241	1540081	1911240521	1301	1692601	2202073901	1361	1852321	2521008881
42	42564	15864488	02	95204	07155608	62	55044	26569928
43	45049	20495907	03	97809	12245127	63	57769	32139147
44	47536	25134784	04	1700416	17342464	64	60496	37716544
45	50025	29781125	05	03025	22447625	65	63225	43302125
1246	1552516	1934434936	1306	1705636	2227560616	1366	1865956	2548895896
47	55009	39096223	07	08249	32681443	67	68689	54497863
48	57504	43764992	08	10864	37810112	68	71424	60108032
49	60601	48441249	09	13481	42946629	69	74161	65726409
50	62500	53125000	10	16100	48091000	70	76900	71353000
1251	1565001	1957816251	1311	1718721	2253243231	1371	1879641	2576987811
52	67504	62515008	12	21344	58403328	72	82384	82630848
53	70009	67221277	13	23969	63571297	73	85129	88282117
54	72516	71935064	14	26596	68747144	74	87876	93941624
55	75025	76656375	15	29225	73930875	75	90625	99609375
1256	1577536	1981385216	1316	1731856	2279122496	1376	1893376	2605285376
57	80049	86125593	17	34489	84322013	77	96129	10969633
58	82564	90865512	18	37124	89529432	78	98884	16662152
59	85081	95616979	19	39761	94744759	79	1901641	22362939
60	87600	2000376000	20	42400	99968000	80	04400	28072000
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1381	1907161	2633789341	1441	2076481	2992209121	1501	2253001	3381754501
82	09924	39514968	42	79364	98442888	02	56004	88518008
83	12089	45248887	43	82249	3004685307	03	59009	95290527
84	15456	50991104	44	85136	10936384	04	02016	3402072064
85	18225	56741625	45	88025	17190125	05	65025	08862625
1386	1920996	2662500456	1446	2090916	3023464536	1506	2268036	3415662216
87	23769	68267603	47	93809	29741623	07	71049	22470843
88	26544	74043072	48	96704	36027392	08	74064	29288512
89	29321	79826869	49	99601	42321849	09	77081	36115229
90	32100	85619000	50	2102500	48025000	10	80100	42951000
1391	1934881	2691419471	1451	2105401	3054936851	1511	2283121	3449795831
92	37664	97228288	52	08304	61257408	12	86144	56649728
93	40449	2703045457	53	11209	67586677	13	89169	63512697
94	43236	08870984	54	14116	73924664	14	92196	70384744
95	46025	14704875	55	17025	80271375	15	95225	77265875
1396	1948816	2720547136	1456	2119936	3086626816	1516	2298256	3484156096
97	51609	26397773	57	22849	92990993	17	2301289	91055413
98	54404	32256792	58	25764	99363912	18	04324	97963832
99	57201	38124199	59	28681	3105745579	19	07361	3504881359
1400	60000	44000000	60	31600	12136000	20	10400	11808000
1401	1962801	2749884201	1461	2134521	3118535181	1521	2313441	3518743761
02	65604	55776808	62	37444	24943128	22	16484	25688648
03	68409	61677827	63	40369	31359847	23	19529	32642667
04	71216	67587264	64	43296	37785344	24	22576	39605824
05	74025	73505125	65	46225	44219625	25	25625	46578125
1406	1976836	2779431416	1466	2149156	3150662696	1526	2328676	3553559576
07	79649	85366143	67	52089	57114563	27	31729	60550183
08	82464	91309312	68	55024	63575232	28	34784	67549952
09	85281	97260929	69	57961	70044709	29	37841	74558889
10	88100	2803221000	70	60900	76523000	30	40900	81577000
1411	1990921	2809189531	1471	2163841	3183010111	1531	2343961	3588604291
12	93744	15166528	72	66784	89506048	32	47024	95640768
13	96569	21151997	73	69729	96010817	33	50089	3602686437
14	99396	27145944	74	72676	3202524424	34	53156	09741304
15	2002225	33148375	75	75625	09046875	35	56225	16805375
1416	2005056	2839159296	1476	2178576	3215578176	1536	2359296	3623878656
17	07889	45178713	77	81529	22118333	37	62369	30961153
18	10724	51206632	78	84484	28667352	38	65444	38052872
19	13561	57243059	79	87441	35225239	39	68521	45153819
20	16400	63288000	80	90400	41792000	40	71600	52264000
1421	2019241	2869341461	1481	2193361	3248367641	1541	2374681	3659383421
22	22084	75403448	82	96324	54952168	42	77764	66512088
23	24929	81473967	83	99289	61545587	43	80849	73650007
24	27776	87553024	84	2202256	68147904	44	83936	80797184
25	30625	93640625	85	05225	74759125	45	87025	87953625
1426	2033476	2899736776	1486	2208196	3281379256	1546	2390116	3695119336
27	36329	2905841483	87	11169	88008303	47	93209	3702294323
28	39184	11954752	88	14144	94646272	48	96304	09478592
29	42041	18076589	89	17121	3301293169	49	99401	16672149
30	44900	24207000	90	20100	07949000	50	2402500	23875000
1431	2047761	2930345991	1491	2223081	3314613771	1551	2405601	3731087151
32	50624	36493568	92	26064	21287488	52	08704	38308608
33	53489	42649737	93	29049	27970157	53	11809	45539377
34	56356	48814504	94	32036	34661784	54	14916	52779464
35	59225	54987875	95	35025	41362375	55	18025	60028875
1436	2062096	2961169856	1496	2238016	3348071936	1556	2421136	3767287616
37	64969	67360453	97	41009	54790473	57	24249	74555693
38	67844	73559672	98	44004	61517992	58	27364	81833112
39	70721	79767519	99	47001	68254499	59	30481	89119879
40	73600	85984000	1500	50000	75000000	60	33600	96416000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1561	2436721	3803721481	1621	2627641	4259406061	1681	2825761	4750104241
62	39844	11036328	22	30884	67293848	82	29124	58586568
63	42969	18360547	23	34129	75191367	83	32489	67078987
64	46096	25694144	24	37376	83098624	84	35856	75581504
65	49225	33037125	25	40625	91015625	85	39225	84094125
1566	1452356	3840389496	1626	2643876	4298942376	1686	2842596	4792616856
67	55489	47751263	27	47129	4306878883	87	45969	4801149703
68	58624	55122432	28	50384	14825152	88	49344	09692672
69	61761	62503009	29	53641	22781189	89	52721	18245769
70	64900	69893000	30	56900	30747000	90	56100	26809000
1571	2468041	3877292411	1631	2660161	4338722591	1691	2859481	4835382371
72	71184	84701248	32	63424	46707968	92	62864	43965888
73	74329	92119517	33	66689	54703137	93	66249	52559557
74	77476	99547224	34	69956	62708104	94	69636	61163384
75	80625	3906984375	35	73225	70722875	95	73025	69777375
1576	2483776	3914430976	1636	2676496	4378747456	1696	2876416	4878401536
77	86929	21887033	37	79769	86781853	97	79809	87035873
78	90084	29352552	38	83044	94826072	98	83204	95680392
79	93241	36827539	39	86321	4402880119	99	86601	4904335099
80	96400	44312000	40	89600	10944000	1700	90000	13000000
1581	2499561	3951805941	1641	2692881	4419017721	1701	2893401	4921675101
82	2502724	59309368	42	96164	27101288	02	96804	30360408
83	05889	66822287	43	99449	35194707	03	2900209	39055927
84	09056	74344704	44	2702736	43297984	04	03616	47761664
85	12225	81876625	45	06025	51411125	05	07025	56477625
1586	2515396	3989418056	1646	2709316	4459534136	1706	2910436	4965203816
87	18569	96969003	47	12609	67667023	07	13849	73940243
88	21744	4004529472	48	15904	75809792	08	17264	82686912
89	24921	12099469	49	19201	83962449	09	20681	91443829
90	28100	19679000	50	22500	92125000	10	24100	5000211000
1591	2531281	4027268071	1651	2725801	4500297451	1711	2927521	5008988431
92	34464	34866688	52	29104	08479808	12	30944	17776128
93	37649	42474857	53	32409	16672077	13	34369	26574097
94	40836	50092584	54	35716	24874264	14	37796	35382344
95	44025	57719875	55	39025	33086375	15	41225	44200875
1596	2547216	4065356736	1656	2742336	4541308416	1716	2944656	5053029696
97	50409	73003173	57	45649	49510393	17	48089	61868813
98	53604	80659192	58	48964	57782312	18	51524	70718232
99	56801	88322799	59	52281	66034179	19	54961	79577959
1600	60000	96000000	60	55600	74296000	20	58400	88448000
1601	2563201	4103684801	1661	2758921	4582567781	1721	2961841	5097328361
02	66404	11379208	62	62244	90849528	22	65284	5106219048
03	69609	19083227	63	65569	99141247	23	68729	15120067
04	72816	26796864	64	68896	4607442944	24	72176	24031424
05	76025	34520125	65	72225	15754625	25	75625	32953125
1606	2579236	4142253016	1666	2775556	4624076296	1726	2979076	5141835176
07	82449	49995543	67	78889	32307963	27	82529	50827583
08	85664	57747712	68	82224	40749632	28	85984	59780352
09	88881	65509529	69	85561	49101309	29	89441	68743489
10	92100	73281000	70	88900	57463000	30	92900	77717000
1611	2595321	4181062131	1671	2792241	4665834711	1731	2996361	5186700891
12	98544	88852928	72	95584	74216448	32	99824	95695168
13	2601769	96653397	73	98929	82608217	33	3003289	5204699837
14	04996	4204463544	74	2802276	91010024	34	06756	13714904
15	08225	12283375	75	05625	99421875	35	10225	22740375
1616	2611456	4220112896	1676	2808976	4707843776	1736	3013696	5231776256
17	14689	27952113	77	12329	16275733	37	17169	40822553
18	17924	35801032	78	15684	24717752	38	20644	49879272
19	21161	43650659	79	19041	33169839	39	24121	58946419
20	24400	51528000	80	22400	41632000	40	27600	68024000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1741	3031081	5277112021	1801	3243601	5841725401	1861	3463321	6445240381
42	34564	86210488	02	47204	51461608	62	67044	55635928
43	38049	95319407	03	50809	61208627	63	70769	66042647
44	41536	5304438784	04	54416	70966464	64	74496	76460544
45	45025	13568625	05	58025	80735125	65	78225	86889625
1746	3048516	5322708936	1806	3261636	5890514616	1866	3481956	6497329896
47	52009	31859723	07	65249	5900304943	67	85689	6507781363
48	55504	41020992	08	68864	10106112	68	89424	18244032
49	59001	50192749	09	72481	19918129	69	93161	28717909
50	62500	59375000	10	76100	29741000	70	96900	39203000
1751	3066001	5368567751	1811	3279721	5939574731	1871	3500641	6549699311
52	69504	77771008	12	83344	49419328	72	04384	60206848
53	73009	86984777	13	86969	59274797	73	08129	70725617
54	76516	96209064	14	90596	69141144	74	11876	81255624
55	80025	5405443875	15	94225	79018375	75	15625	91796875
1756	3083536	5414689216	1816	3297856	5988906496	1876	3519376	6602349376
57	87049	23945093	17	3301489	98805513	77	23129	12913133
58	90564	33211512	18	05124	6008715432	78	26884	23488152
59	94081	42488479	19	08761	18636259	79	30641	34074439
60	97600	51776000	20	12400	28568000	80	34400	44672000
1761	3101121	5461074081	1821	3316041	6038510661	1881	3538161	6655280841
62	04644	70382728	22	19684	48464248	82	41924	65900968
63	08169	79701947	23	23329	58428767	83	45689	76532387
64	11696	89031744	24	26976	68404224	84	49456	87175104
65	15225	98372125	25	30625	78390625	85	53225	97829125
1766	3118756	5507723096	1826	3334276	6088387976	1886	3556996	6708494456
67	22289	17084663	27	37929	98396283	87	60769	19171103
68	25824	26456832	28	41584	6108415552	88	64544	29859072
69	29361	35839609	29	45241	18445789	89	68321	40558369
70	32900	45233000	30	48900	28487000	90	72100	51269000
1771	3136441	5554637011	1831	3352561	6138539191	1891	3575881	6761990971
72	39984	64051648	32	56224	48602368	92	79664	72724288
73	43529	73476917	33	59889	58676537	93	83449	83468957
74	47076	82912824	34	63556	68761704	94	87236	94224984
75	50625	92359375	35	67225	78857875	95	91025	6804992375
1776	3154176	5601816576	1836	3370896	6188965056	1896	3594816	6815771136
77	57729	11284433	37	74569	99083253	97	98609	26561273
78	61284	20762952	38	78244	6209212472	98	3602404	37362792
79	64841	30252139	39	81921	19352719	99	06201	48175699
80	68400	39752000	40	85600	29504000	1900	10000	59000000
1781	3171961	5649262541	1841	3389281	6239666321	1901	3613801	6869835701
82	75524	58783768	42	92964	49839688	02	17604	80682808
83	79089	68315687	43	96649	60024107	03	21409	91541327
84	82656	77858304	44	3400336	70219584	04	25216	6902411264
85	86225	87411625	45	04025	80426125	05	29025	13292625
1786	3189796	5696975656	1846	3407716	6290643736	1906	3632836	6924185416
87	93369	5706550403	47	11409	6300872423	07	36649	35089643
88	96944	16135872	48	15104	11112192	08	40464	46005312
89	3200521	25732069	49	18801	21363049	09	44281	56932429
90	04100	35339000	50	22500	31625000	10	48100	67871000
1791	3207681	5744956671	1851	3426201	6341898051	1911	3651921	6978821031
92	11264	54585088	52	29904	52182208	12	55744	89782528
93	14849	64224257	53	33609	62477477	13	59569	7000755497
94	18436	73874184	54	37316	72783864	14	63396	11739944
95	22025	83534875	55	41025	83101375	15	67225	22735875
1796	3225616	5793206336	1856	3444736	6393430016	1916	3671056	7033743296
97	29209	5802888573	57	48449	6403769793	17	74889	44762213
98	32804	12581592	58	52164	14120712	18	78724	55792632
99	36401	22285399	59	55881	24482779	19	82561	66834559
1800	40000	32000000	60	59600	34856000	20	86400	77888000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1921	3690241	7088952961	1948	3794704	7392083392	1975	3900625	7703734375
22	94084	7100029448	49	98601	7403473349	76	04576	15442176
23	97929	11117467	50	3802500	14875000	77	08529	27161833
24	3701776	22217024	51	06401	26288351	78	12484	38893352
25	05625	33328125	52	10304	37713408	79	16441	50636739
1926	3709476	7144450776	1953	3814209	7449150177	1980	3920400	7762392000
27	13329	55584983	54	18116	60598664	81	24361	74159141
28	17184	66730752	55	22025	72058875	82	28324	85938168
29	21041	77888089	56	25936	83530816	83	32289	97729087
30	24900	89057000	57	29849	95014493	84	36256	7809531904
1931	3728761	7200237491	1958	3833764	7506509912	1985	3940225	7821346625
32	32624	11429568	59	37681	18017079	86	44196	33173256
33	36489	22633237	60	41600	29536000	87	48169	45011803
34	40356	33848504	61	45521	41066681	88	52144	56862272
35	44225	45075375	62	49444	52609128	89	56121	68724669
1936	3748096	7256313856	1963	3853369	7564163347	1990	3960100	7880599000
37	51969	67563953	64	57296	75729344	91	64081	92485271
38	55844	78825672	65	61225	87307125	92	68064	7904383488
39	59721	90099019	66	65156	98896696	93	72049	16293657
40	63600	7301384000	67	69089	7610498063	94	76036	28215784
1941	3767481	7312680621	1968	3873024	7622111232	1995	3980025	7940149875
42	71364	23988888	69	76961	33736209	96	84016	52095936
43	75249	35308807	70	80900	45373000	97	88009	64053973
44	79136	46640384	71	84841	57021611	98	92004	76023992
45	83025	57983625	72	88784	68682048	99	96001	88005999
1946	3786916	7369338536	1973	3892729	7680354317	2000	4000000	8000000000
47	90809	80705123	74	96676	92038424			
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

AVVISO SULLA TAVOLA SEGUENTE

La seguente Tavola esprime in decimali i rotti della serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ec. fino a $\frac{1}{700}$, cioè i rotti il cui Termine Generale è N^{-1}, fino ad $N = 700$.

TAVOLA DEI ROTTI 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} ec. IN DECIMALI

N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}
1	1	61	0,016393443	121	0,008264463	181	0,005524862
2	0,5.	62	129032	22	196721	82	0,005494505
3	333333333	63	0,015873016	23	130081	83	64481
4	25.	64	625.	24	064516	84	34783
5	0,2.	65	384615	25	0,008.	85	05405
6	0,166666667	66	0,015151515	126	0,007936508	186	0,005376344
7	42857143	67	0,014925373	27	874016	87	47594
8	25.	68	705882	28	8125.	88	19149
9	11111111	69	492754	29	751938	89	0,005291005
10	0,1.	70	285714	30	692308	90	63158
11	0,090909091	71	0,014084507	131	0,007633588	191	0,005235602
12	83333333	72	0,013888889	32	575758	92	08333
13	76923077	73	698630	33	518797	93	0,005181347
14	71428571	74	513514	34	462687	94	54639
15	66666667	75	333333	35	407407	95	28205
16	0,0625.	76	0,013157895	136	0,007352941	196	0,005102041
17	0,058823529	77	0,012987013	37	299270	97	0,005076142
18	5555556	78	820513	38	246376	98	50505
19	2631579	79	658228	39	194245	99	25126
20	0,05.	80	0,0125.	40	142857	200	0,005.
21	0,047619048	81	0,012345679	141	0,007092199	201	0,004975124
22	5454545	82	195122	42	042254	02	50495
23	3478261	83	048193	43	0,006993007	03	26108
24	1666667	84	0,011904762	44	944444	04	01961
25	0,04.	85	764706	45	896552	05	0,004878049
26	0,038461538	86	0,011627907	146	0,006849315	206	0,004854369
27	7037037	87	494253	47	802721	07	30918
28	5714286	88	363636	48	756757	08	07692
29	4482759	89	235955	49	711409	09	0,004784689
30	3333333	90	111111	50	666667	10	61905
31	0,032258065	91	0,010989011	151	0,006622517	211	0,004739336
32	125.	92	869565	52	578947	12	16981
33	0303030	93	752688	53	535948	13	0,004694836
34	0,029411765	94	638298	54	493506	14	72897
35	8571429	95	526316	55	451613	15	51163
36	0,027777778	96	0,010416667	156	0,006410256	216	0,004629630
37	7027027	97	309278	57	369427	17	08295
38	6315789	98	204082	58	329114	18	0,004587156
39	5641026	99	101010	59	289308	19	66210
40	0,025.	100	0,01.	60	25.	20	45455
41	0,024390244	101	0,009900990	161	0,006211180	221	0,004524887
42	3809524	02	803922	62	172840	22	04505
43	3255814	03	708738	63	134969	23	0,004484305
44	2727273	04	615385	64	097561	24	64286
45	2222222	05	523810	65	060606	25	44444
46	0,021739130	106	0,009433962	166	0,006024096	226	0,004424779
47	1276596	07	345794	67	0,005988024	27	05286
48	0833333	08	259259	68	952381	28	0,004385965
49	0408163	09	174312	69	917160	29	66812
50	0,02.	10	090909	70	882353	30	47826
51	0,019607843	111	0,009009009	171	0,005847953	231	0,004329004
52	9230769	12	0,008928571	72	813953	32	10345
53	8867925	13	849557	73	780347	33	0,004291845
54	8518519	14	771930	74	747126	34	73504
55	8181818	15	695652	75	714286	35	55319
56	0,017857143	116	0,008620690	176	0,005681818	236	0,004237288
57	7543860	17	547009	77	649718	37	19409
58	7241379	18	474576	78	617978	38	01681
59	6949153	19	403361	79	586592	39	0,004184100
60	6666667	20	333333	80	555556	40	66667
N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}

N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹
241	0,004149377	301	0,003322259	361	0,002770083	421	0,002375297
42	32231	02	11258	62	62431	22	69668
43	15226	03	00330	63	54821	23	64067
44	0,004098361	04	0,003289474	64	47253	24	58491
45	81633	05	78689	65	39726	25	52941
246	0,004065041	306	0,003267974	366	0,002732240	426	0,002347418
47	48583	07	57329	67	24796	27	41920
48	32258	08	46753	68	17391	28	36449
49	16064	09	36246	69	10027	29	31002
50	0,004.	10	25806	70	02703	30	25581
251	0,003984064	311	0,003215434	371	0,002695418	431	0,002320186
52	68254	12	05128	72	88172	32	14815
53	52569	13	0,003194888	73	80965	33	09469
54	37008	14	84713	74	73797	34	04147
55	21569	15	74603	75	66667	35	0,002298851
256	0,00390625.	316	0,003164557	376	0,002659574	436	0,002293578
57	0,003891051	17	54574	77	52520	37	88330
58	75969	18	44654	78	45503	38	83105
59	61004	19	34796	79	38522	39	77904
60	46154	20	25.	80	31579	40	72727
261	0,003831418	321	0,003115265	381	0,002624672	441	0,002267574
62	16794	22	05590	82	17801	42	62443
63	02281	23	0,003095975	83	10966	43	57336
64	0,003787879	24	86420	84	04167	44	52252
65	73585	25	76923	85	0,002597403	45	47191
266	0,003759398	326	0,003067485	386	0,002590674	446	0,002242152
67	45318	27	58104	87	83979	47	37136
68	31343	28	48780	88	77320	48	32143
69	17472	29	39514	89	70694	49	27171
70	03704	30	30303	90	64103	50	22222
271	0,003690037	331	0,003021148	391	0,002557545	451	0,002217295
72	76471	32	12048	92	51020	52	12389
73	63004	33	03003	93	44529	53	07506
74	49635	34	0,002994012	94	38071	54	02643
75	36364	35	85075	95	31646	55	0,002197802
276	0,003623188	336	0,002976190	396	0,002525253	456	0,002192982
77	10108	37	67359	97	18892	57	88184
78	0,003597122	38	58580	98	12563	58	83406
79	84229	39	49852	99	06266	59	78649
80	71429	40	41176	400	0,0025.	60	73913
281	0,003558719	341	0,002932551	401	0,002493766	461	0,002169197
82	46099	42	23977	02	87562	62	64502
83	33569	43	15452	03	81390	63	59827
84	21127	44	06977	04	75248	64	55172
85	08772	45	0,002898551	05	69136	65	50538
286	0,003496503	346	0,002890173	406	0,002463054	466	0,002145923
87	84321	47	81844	07	57002	67	41328
88	72222	48	73563	08	50980	68	36752
89	60208	49	65330	09	44988	69	32196
90	48276	50	57143	10	39024	70	27660
291	0,003436426	351	0,002849003	411	0,002433090	471	0,002123142
92	24658	52	40909	12	27184	72	18644
93	12969	53	32861	13	21308	73	14165
94	01361	54	24859	14	15459	74	09705
95	0,003389831	55	16901	15	09639	75	05263
296	0,003378378	356	0,002808989	416	0,002403846	476	0,002100840
97	67003	57	01120	17	0,002398082	77	0,002096436
98	55705	58	0,002793296	18	92345	78	92050
99	44482	59	85515	19	86635	79	87683
300	33333	60	77778	20	80952	80	83333
N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹

N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}
481	0,002079002	536	0,001865672	591	0,001692047	646	0,001547988
82	74689	37	62197	92	89189	47	45595
83	70393	38	58736	93	86341	48	43210
84	66116	39	55288	94	83502	49	40832
85	61856	40	51852	95	80672	50	38462
486	0,002057613	541	0,001848429	596	0,001677852	651	0,001536098
87	53388	42	45018	97	75042	52	33742
88	49180	43	41621	98	72241	53	31397
89	44990	44	38235	99	69449	54	29052
90	40816	45	34862	600	66667	55	26718
491	0,002036660	546	0,001831502	601	0,001663894	656	0,001524390
92	32520	47	28154	02	61130	57	22070
93	28398	48	24818	03	58375	58	19757
94	24292	49	21494	04	55630	59	17451
95	20202	50	18182	05	52893	60	15152
496	0,002016129	551	0,001814882	606	0,001650165	661	0,001512859
97	12072	52	11594	07	47446	62	10574
98	08032	53	08318	08	44737	63	08296
99	04008	54	05054	09	42036	64	06024
500	0,002.	55	01802	10	39344	65	03759
501	0,001996008	556	0,001798561	611	0,001636661	666	0,001501501
02	92032	57	95332	12	33987	67	0,001499250
03	88072	58	92115	13	31321	68	97006
04	84127	59	88909	14	28664	69	94768
05	80198	60	85714	15	26016	70	92537
506	0,001976285	561	0,001782531	616	0,001623377	671	0,001490313
07	72387	62	79359	17	20746	72	88095
08	68504	63	76199	18	18123	73	85884
09	64637	64	73050	19	15509	74	83680
10	60784	65	69911	20	12903	75	81481
511	0,001956947	566	0,001766784	621	0,001610306	676	0,001479290
12	53125.	67	63668	22	07717	77	77105
13	49318	68	60563	23	05136	78	74926
14	45525	69	57469	24	02564	79	72754
15	41748	70	54386	25	0,0016.	80	70588
516	0,001937984	571	0,001751313	626	0,001597444	681	0,001468429
17	34236	72	48252	27	94896	82	65276
18	30502	73	45201	28	92357	83	64129
19	26782	74	42160	29	89825	84	61988
20	23077	75	39130	30	87302	85	59854
521	0,001919386	576	0,001736111	631	0,001584786	686	0,001457726
22	15709	77	33102	32	82278	87	55604
23	12046	78	30104	33	79779	88	53488
24	08397	79	27116	34	77287	89	51379
25	04762	80	24138	35	74803	90	49275
526	0,001901141	581	0,001721170	636	0,001572327	691	0,001447178
27	0,001897533	82	18213	37	69859	92	45087
28	93939	83	15266	38	67398	93	43001
29	90356	84	12329	39	64945	94	40922
30	86792	85	09402	40	625.	95	38849
531	0,001883239	586	0,001706485	641	0,001560062	696	0,001436782
32	79699	87	03578	42	57632	97	34720
33	76173	88	00680	43	55210	98	32665
34	72659	89	0,001697793	44	52795	99	30615
35	69159	90	94915	45	50388	700	28571
N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}

FINE DELLE TAVOLE

Fig: 99.

Fig. 112.

Fig. 247.

Fig. 165

268

169

172

173

176

177

178

282

283

Fig. 284.
286
288
291
292
297
296
298
202
Fig. 203.